



Matematiikan ymmärtämisestä

Käsitteistä käytäntöön

Jorma Leinonen

Acta Universitatis Lapponiensis 371

JORMA LEINONEN

Matematiikan ymmärtämisestä
Käsitteistä käytäntöön

Akateeminen väitöskirja,
joka Lapin yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan suostumuksella
esitetään julkisesti tarkastettavaksi Lapin yliopiston luentosalissa 3
kesäkuun 2. päivänä 2018 klo 12



LAPIN YLIOPISTO
UNIVERSITY OF LAPLAND

Rovaniemi 2018

Acta Universitatis Lapponiensis 371

JORMA LEINONEN

Matematiikan ymmärtämisestä
Käsitteistä käytäntöön



LAPIN YLIOPISTO
UNIVERSITY OF LAPLAND

Rovaniemi 2018

Lapin yliopisto
Kasvatustieteiden tiedekunta

Ohjaajat: Emeritusprofessori
Erkki Pehkonen
Helsingin yliopisto

Emeritusprofessori
Raimo Rajala
Lapin yliopisto

Esitarkastajat: Professori
Markku Hannula
Helsingin yliopisto

Professori
Veli-Matti Värri
Tampereen yliopisto

Kustos: Emeritusprofessori
Raimo Rajala
Lapin yliopisto

Vastaväittäjä: Professori
Markku Hannula
Helsingin yliopisto

Taitto: Taittotalo PrintOne

Kansi: Esa-Pekka Tuppi

Myynti:

Lapland University Press

PL 8123

96101 Rovaniemi

puh. 040 821 4242

julkaisu@ulapland.fi

www.ulapland.fi/LUP

Hansaprint Oy, Turenki 2018

Painettu:

Acta Universitatis Lapponiensis 371

ISBN 978-952-337-073-9

ISSN 0788-7604

Pdf:

Acta electronica Universitatis Lapponiensis 238

ISBN 978-952-337-074-6

ISSN 1796-6310

Tiivistelmä

Jorma Leinonen

Matematiikan ymmärtämisestä. Käsitteistä käytäntöön

Kasvatustieteiden tiedekunta

Lapin yliopisto, Rovaniemi

Peruskoulun opetuksen keskeisiin yleistavoitteisiin ovat 1970-luvulta lähtien kuuluneet ajattelutaitojen ja ymmärtämisen kehittäminen. Tämän tutkimuksen päätarkoitus on selvittää ymmärtämisen luonnetta ja tehtävää matematiikan oppimisessa. Ymmärtäminen ei ole mikään joko/tai -asia, vaan käsite, jolla on useita merkityksiä ja tehtäviä eri konteksteissa. Englannin kielessä on kaksi sanaa verbille ymmärtää: *comprehend* ja *understand*. Niitä voidaan pitää lähes synonyymeinä. Edellinen viittaa prosessiin ja prosessin tulokseen, jälkimmäinen vain prosessin tulokseen. Suomen kielessä ymmärtäminen onkin nähtävä dualistisena, koska vastaavaa sanaparia on vaikea löytää kielestämme.

Tämä tutkimus on artikkeliväitöskirja, joka perustuu viiteen referoituun artikkeliin. Kysymyksessä on toimintatutkimus, joka antaa kolmenlaista tietoa: menetelmätietoa, tietoa aiheesta ja tietoa tuotteesta. Toimintatutkimus sallii monipuolisen menetelmävalikoiman. Tässä tutkimuksessa on käytetty systemaattista analyysiä, kvantitatiivista menetelmää, diskurssianalyysiä ja fenomenografiaa. Systemaattisen analyysin tuloksena syntyi mielekkään oppimisen malli. Empiirisiä menetelmiä käytettiin mallin kehittämiseen ja koetteluun.

Tutkimuksen kolme pääkysymystä ovat: 1) Mikä on käsitteiden asema ymmärtämisessä? 2) Mikä on kysymysten tehtävä mielekkäässä oppimisessa? 3) Mitä tehtäviä ymmärtämisellä on mielekkäässä oppimisessa? Yleiskäsite, käsite tai yleistys on ajattelun ja ymmärtämisen perustekijä. Tässä työssä käsitteellä tarkoitetaan realismin mukaisesti tietoisuutta attribuutista. Käsitteillä voidaan saada ideat ja asiat käsiin, jolloin ne tulevat ymmärretyiksi. Ajatusten vaihto, opettaminen ja keskustelu edellyttävät, että käsitteillä on julkinen ja henkilökohtainen ulottuvuus. Toimintatutkimuksen mukaisesti kehitettiin ja kokeiltiin keinoja, miten ymmärtämistä voidaan arvioida. Lisäksi kokeiltiin, miten sopivilla kysymyksillä voidaan fokusoida oppijan tarkkaavaisuutta ja virittää päättelyä, joka kehittää faktojen, käsitteiden ja periaatteiden ymmärtämistä. Tutkimuksessa havaittiin, että toiminnallisten periaatteiden ja sääntöjen pohdiskelut kehittivät myös laskutaitoa.

Mielekkään oppimisen malli on vastaus kolmanteen kysymykseen ja se on tämän tutkimuksen päätulos. Mallin produktiivista toimintaa ylläpitää kestoimistin tietojärjestelmän ja työmuistin kognitiivisten prosessien vuorovaikutus, joka tuottaa uutta tietoa ja kehittää ajattelutaitoja. Vuorovaikutus perustuu käsitteiden ja ymmärtämisen dualistiseen luonteeseen. Mallin mukaan oppiminen ilman taustatietoa eli käsitteellistä ymmärtämistä on mahdotonta, koska ajattelu perustuu aiemmin hankittuun tietoon. Käsitteellisen tiedon lisäksi ymmärtämisellä on mallissa kolme muuta muotoa: tul-

kinta, synteesi ja akkommodaatio, jotka toimivat työmuistissa. Ajattelun ja oppimisen ydinprosessit operoivat päättelykeskuksessa, jossa tuotetaan uutta tietoa tulkinnan, ongelmanratkaisun ja todistamisen avulla.

Avainsanat: käsite, tieto, ymmärtäminen, mielekäs oppiminen

Abstract

Jorma Leinonen

On Understanding Mathematics, From Concepts to Practice

Faculty of Education

University of Lapland

Rovaniemi, Finland

From the beginning, the primary goals of comprehensive school curriculum have been to develop thinking skills and understanding. The main purpose of this research was to find out the nature and function of understanding in mathematics learning. Understanding, however, is not an on/off system, but a concept that has several meanings and functions in different contexts. In English there are two verbs which are almost synonymous: to understand and to comprehend. Comprehend seems to imply a mental process and understand connotes more the result of such a process. In Finnish the word "ymmärtää" seems to be dualistic, because we don't have a corresponding word pair in our language.

This research is an article dissertation based on five referred articles. It is a teacher research that provides three types of information: methods of knowledge, information about subject and information about product. A teacher research allows a versatile set of methods. Systematic analysis, quantitative method, discourse analysis and phenomenography have been used. As a result of the systematic analysis, a meaningful learning model was developed. Empirical methods were used to develop and to investigate the model.

In the study there were three main questions: 1) How are the general concepts related to understanding? 2) What is the role of questions in meaningful learning? 3) What are the functions of understanding in meaningful learning? The term concept can also be called the general concept or the generalization and it is the base factor of thinking and understanding. In this work the term concept refers to consciousness of an attribute according to realism. With concepts we can grasp of ideas and become understandable. Communication and teaching require, that the concepts have public and private dimensions. Tools to evaluate and promote understanding were developed and investigated according to a teacher research. Furthermore it was investigated how we can focus a learner's attention and stimulate reasoning to develop understanding of facts, concepts and principles. It was found that pondering of functional principles and rules promoted also calculating skills.

The model of meaningful learning is the answer to the third question and it is the main result of this study. The productive processes in the model are maintained by the interaction between knowledge system in the permanent memory and cognitive processes in the working memory. It generates new knowledge and develops thinking skills. This is also a clear indication of the dualistic nature of understanding in learning process. According to this model, learning without conceptual understanding is impossible, because our thinking is based on prior knowledge. In addition to the conceptual

knowledge there are three other modes of understanding in the model: interpretation, synthesis and accommodation. They refer to acts of comprehension and are operating in the working memory. The main activities of reasoning and learning are operating in the reasoning module producing new information through pondering, problem solving and proof proving.

Keywords: concept, knowledge, understanding, meaningful learning

Esipuhe

Kiinnostukseni matematiikan ymmärtämisen problematiikkaan ulottuu jo alakouluaikeihin. Ihmettelin, miksi toiset oppilaat menestyivät matematiikan kokeissa paremmin kuin toiset, vaikka meillä oli samat oppikirjat, sama opettaja ja samanlainen kotitausta. Asia jäi pitkäksi aikaa unohduksiin, mutta parikymmentä vuotta sitten Tampereen ainedidaktiikan seminaarissa oppimiseron ongelma tuli uudelleen esille. Siellä professori Erkki Pehkonen otti puheeksi, että matematiikan ymmärtämisen tutkimuksessa olisi paljon tehtävää. Päätin lähteä selvittämään asiaa, ja siitä kehkeytyi lopulta tämä kirja.

En lakkaa kiittämästä Oulun ja Lapin yliopiston henkilökuntaa siitä tuesta ja ohjauksesta, jota olen saanut tutkimustöissäni. Kiitokset professori Jorma Kankaalle tieteellisen työn perusopeista, joita sain hänen kosmisen fysiikan tutkimusryhmässään Oulun yliopistossa. Tultuani ainedidaktiikan lehtoriksi Lapin yliopistoon alkoi kiinnostukseni työni vuoksi siirtyä kasvatustieteisiin. Kiitän professori Juhani Jussilaa niistä kirjoista ja kirjallisuusvihjeistä, joilla hän ohjasi minua kasvatustieteelliseen tutkimukseen. Hän luki käsikirjoituksiani ja antoi arvokkaita neuvoja ensimmäisten kasvatustieteen artikkelieni kirjoittamisessa. Professori Kari E. Nurmea kiitän neuvoista ja kirjallisuudesta, joiden avulla pääsin tavoittelemaan systemaattisen analyysin ajatusmaailmaa. Kielitaidollaan hän auttoi minua tarkistamaan muutamia kiinnostavia latinankielisiä keskiajan tekstejä. Edesmennyt professori Juhani Puro oli uupumaton käsikirjoitusten kommentoija ja monenlaisten ideoiden mestari, joista tuskin osasin siihen aikaan kyllin kiittää. Helsingin yliopiston tutkimusryhmällä on muutenkin ollut tärkeä rooli tutkimusten eri vaiheissa, ja vielä aivan viime metreillä väitöskirjan kanssa sain merkittävää tukea dekaani Markku Hannulalta.

Erityiskiitokset menevät tietysti työni virallisille ohjaajille. Professori Erkki Pehkonen on ollut aivan väsymätön ohjaaja ja kuuntelija. Lapin yliopistossa olen aina voinut kääntyä toisen ohjaajan professori Raimo Rajalan puoleen ja saanut häneltä hyviä neuvoja työssäni ilmenneisiin ongelmiin. Kiitän myös professori Kyösti Kurtakkoa lukuisista kahdenkeskisistä keskusteluista, jotka edistivät tieteellisen ajatteluni kehittymistä. Olen kiitollinen professori Kaarina Määtän kannustavasta suhtautumisesta työtäni kohtaan. Professori Päivi Naskalia saan kiittää monista kiinnostavista keskustelutuokioista, jotka herättivät minut katselemaan asioita uusista näkökulmista. Dekaanin Tuija Turunen saa kiitokseni siitä tuesta, avusta ja neuvoista, jota olen häneltä saanut kirjan viimeistelyssä.

Helsingin tutkijaryhmästä professori Maija Ahteeta saan kiittää ohjeista, joiden avulla opin paremmin selviytymään tutkimukseni monissa käänteissä. Professori Kaarle Kurki-Suonio tarjosi auliisti neuvoja kohtaamistani ongelmista selviytymiseen, kiitän myös häntä. Keskustelut KT Rauno Koskisen kanssa ansaitsevat myös kiitokseni. Raunon asiantuntemus ja huolella harkitut sanat johdattivat minut syvällisemmin ymmärtämisen maailmaan. KT Liisa Näveriä saan kiittää monista keskustelutuokioista, joissa vaihdoimme ajatuksia. Erityiskiitokseni kuuluvat työni virallisille esitarkastajille professori Markku Hannulalle ja professori Veli-Matti Värrielle heidän arvokkaista palautteistaan. He ovat nähneet työni kanssa paljon vaivaa ja antaneet selkeitä ohjeita

puutteiden korjaamiseen. Olen parhaani mukaan pyrkinyt ottamaan ne huomioon tekstiä korjatessani.

Filosofi Toivo Salonen ansaitsee kiitokseni niistä lukuisista kurseista ja keskusteluisista, joissa sain tutustua filosofiseen ajattelutapaan. Lämpimät kiitokseni saa myös KL Anne Kontsas siitä yhteistyöstä, joka tuotti artikkelin Kasvatuslehteen. Edelleen lausun kiitokseni opettajatovereilleni ystävällisestä ja avuliaasta yhteistyöstä. Merkittävänä työtovereina mieleeni ovat jääneet lehtorit Seija Tuovila, Päivi Linnansaari, Tuomo Suhonen, Marko Karhu ja Antti Kursu. Heidän kanssaan oli helppo tulla juttuun, ja heiltä sai tarvittaessa monenlaista apua ja tukea. Kirjastoon ja kasvatustieteiden tiedekunnan hallintohenkilökunnalle menevät myös kiitokseni avuliaisuudesta. Hallinnosta mainittakoon Raija Lunnas, Kyllikki Auranen, Helena Juntunen, Pia Satta ja Anne Autti. Ilman julkaisukoordinaattori Paula Kassisen ja hänen tiiminsä tehokasta työtä tämä kirja tuskin olisi valmistunut ajoissa, kiitokset heille.

Lisäksi lausun kiitokseni Michael Hurdille ja Stefanie Lavanille englanninkielisten artikkelien kieliasun tarkistamisesta. Kiitokset kuuluvat myös Lapin yliopistolle tutkimukseeni myönnetystä apurahasta samoin kuin Kasvatustieteiden tiedekunnalle matka-apurahoista konferenssimatkoille.

Kiitokset ystävilleni, jotka ovat pysyneet ystävinä, vaikka ajatukseni ovat pyörineet tämän työn parissa vuosikausia. Samoin kiitän perheen nuorta väkeä Sannaa ja Jukkaa perheineen heidän työtäni kohtaan osoittamastaan avusta ja tuesta. Lopuksi erityiskiitos vaimolleni Eevalle kirjoitusasujen tarkistamisesta, atk-avusta ja muusta tuesta.

Rovaniemellä 16.04.2018

Jorma Leinonen

Sisällysluettelo

Tiivistelmä	5
Abstract	7
Esipuhe	9
Alkuperäiset artikkelit	13
1 Johdanto	15
1.1 Ymmärtäminen matematiikan opetuksessa.....	15
1.2 Tutkimuksen eteneminen.....	17
2 Ajattelun ja ymmärtämisen lähikäsitteitä	19
2.1 Ymmärryksestä ymmärtämiseen.....	19
2.2 Käsitteen tehtävistä ja luonteesta.....	20
2.2.1 Käsitteen määrittely.....	21
2.2.2 Käsiteluokista.....	22
2.2.3 Käsitteen representaatiot.....	23
2.2.4 Abstrahointi käsitteen muodostuksessa.....	24
2.3 Tieto.....	25
2.3.1 Tieto ja informaatio.....	25
2.3.2 Matemaattisesta tiedosta.....	27
2.3.3 Klassinen tietokäsitys.....	27
2.3.4 Aktiivisen tiedon käsite.....	28
2.3.5 Propositionaalinen ja proseduraalinen tieto.....	29
2.3.6 Muita tiedon lajeja.....	31
2.4 Oppiminen.....	33
2.4.1 Oppimiskohteen ontologinen luonne.....	34
2.4.2 Oppimiskäsityksiä.....	36
2.4.3 Syvä- ja pintasuuntautunut opiskelu.....	38
3 Matemaattinen ajattelu ja ymmärtäminen	39
3.1 Matemaattinen ajattelu.....	39
3.1.1 Ajattelun luonteesta.....	39
3.1.2 Intuitio matemaattisessa ajattelussa.....	40
3.2 Ymmärtäminen ja mielekäs oppiminen.....	42
3.2.1 Merkityksen ymmärtäminen.....	42
3.2.2 Ausubelin oppimismalli.....	44
3.2.3 Matematiikan ymmärtämisen tutkimus.....	45
3.3 Ymmärtäminen opetussuunnitelmissa.....	48

4 Tutkimuksen tarkoitus ja toteutus	52
4.1 Tutkimuskysymykset.....	52
4.2 Tutkimusmenetelmät.....	53
4.2.1 Systemaattinen analyysi.....	54
4.2.2 Mixed-menetelmät.....	55
4.2.2.1 Kvantitatiivinen menetelmä.....	55
4.2.2.2 Kvalitatiiviset menetelmät.....	56
4.3 Luotettavuus.....	58
4.3.1 Systemaattinen analyysi.....	58
4.3.2 Mixed-menetelmät.....	59
4.3.2.1 Kvantitatiivinen menetelmä.....	59
4.3.2.2 Kvalitatiiviset menetelmät.....	60
4.4 Tiivistelmät alkuperäisistä artikkeleista.....	63
4.4.1 (A) Leinonen, J. (2002). Ymmärtäminen – jäsentynyttä tietämistä. Kasvatus 33 (5), 475-483.....	63
4.4.2 (B) Leinonen, J. (2003). Käsite ja ymmärtäminen. Kasvatus 34 (1), 56-65.	65
4.4.3 (C) Leinonen, J. & Korhonen, A. (2005). Miten arvioida matematiikan opiskelua ja ymmärtämistä. Kasvatus 36 (1), 33-42.....	66
4.4.4 (D) Leinonen, J. (2011). Understanding and Mathematical Problem Solving. Teoksessa K. Szücs & B. Zimmermann (eds.), Proceedings of the ProMath meeting in Jena 2010, 85-94. University of Jena.....	67
4.4.5 (E) Leinonen, J. & Pehkonen, E. (2011). Teacher students' improvements in calculation skills and understanding in the case of division. Teoksessa B. Ubutz (ed.), Developing Mathematics Thinking. Proceedings of the 35 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) July 10-15, 2011 in Ankara, (vol. 3, pp. 129-136). Ankara: Middle East Technical University.....	69
5 Tutkimustulokset ja yhteenveto	72
5.1 Tutkimustulokset.....	72
5.1.1 Mikä on käsitteiden asema ymmärtämisessä?.....	73
5.1.2 Mikä on kysymysten tehtävä mielekkäässä oppimisessa?.....	75
5.1.3 Mitä tehtäviä ymmärtämisellä on mielekkäässä oppimisessa?.....	78
5.1.3.1 Mikä on käsitteellisen tiedon (Y1) asema mielekkään oppimisen mallissa?.....	79
5.1.3.2 Mikä on tulkinnan (Y2) tehtävä mielekkään oppimisen mallissa?.....	80
5.1.3.3 Miten synteesi (Y3) toimii mielekkään oppimisen mallissa?.....	80
5.1.3.4 Mikä on ongelmanratkaisun asema mielekkään oppimisen mallissa?.....	81
5.1.3.5 Mikä on akkommodaation (Y4) tehtävä mielekkään oppimisen mallissa?..	81
5.2 Yhteenveto.....	83
6 Pohdintaa	87
Lähteet	89
Liite: Alkuperäiset artikkelit	99

Alkuperäiset artikkelit

- A Leinonen, J. (2002). Ymmärtäminen – jäsentynyttä tietämistä. *Kasvatus* 33 (5), 475-483..... 101
- B Leinonen, J. (2003). Käsite ja ymmärtäminen. *Kasvatus*, 34 (1), 56-65..... 113
- C Leinonen, J. & Korhonen, A. (2005). Miten arvioida matematiikan opiskelua ja ymmärtämistä. *Kasvatus*, 36 (1), 33-42. 125
- D Leinonen, J. (2011). Understanding and Mathematical Problem Solving. In: K. Szücs & B. Zimmermann (eds.), *Problem Solving in Mathematics Education. Proceedings of the 12th ProMath Conference September 10-12, 2010 in Jena* (pp. 85-94). Munster: WTM..... 137
- E Leinonen, J. & Pehkonen, E. (2011). Teacher students' improvements in calculation skills and understanding in the case of division. In: B. Ubuz (ed.), *Developing Mathematics Thinking. Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* July 10-15, 2011 in Ankara (vol. 3, pp. 129-136). Ankara: Middle East Technical University..... 149

1 Johdanto

Koululaitoksessamme elettiin suurten murrosten aikaa 1970-luvun alussa, kun siirryttiin peruskouluun. Matematiikan opetuksessa kokeiltiin joukko-oppia, siitä kuitenkin luovuttiin nopeasti (back to basics). Myöhemmin, 1980-luvulla, alettiin tietämisen sijasta kiinnittää huomiota joustaviin ajattelutaitoihin (ks. esim. Marzano 2001). Nykyisissä opetussuunnitelmissa se näkyy mm. tavoitteena kehittää oppilaan tietotaitoja, luovuutta ja ongelmanratkaisutaitoja. Tällaisilla taidoilla on kysyntää jatkuvasti muuttuvassa yhteiskunnassamme.

Kansainvälisten tutkimusten mukaan Suomen 15-vuotiaat koululaiset ovat tämän vuosituhannen alussa olleet kärkipäässä matematiikan tiedoissa ja taidoissa. Viime vuosina tehdyissä kansallisissa ja kansainvälisissä koulusaavutustesteissä on havaittu matemaattisten taitojen heikkenemistä (Hirvonen 2012; Rautopohja 2013; Välijärvi 2014; OECD 2016). Vaikka menestys on ollut laskusuunnassa, ovat suomalaiset kuitenkin olleet vuoden 2016 mittauksen mukaan sijalla 13 kaikkiaan 73 maan joukossa (OECD emt.). Joiltakin osin opetussuunnitelman tavoitteet ovat jääneet saavuttamatta. Esimerkiksi matematiikassa nykyisin jopa ylioppilailla on vakavia puutteita jakolaskuissa ja jakoalgoritmin ymmärtämisessä (Laine ym. 2004, Merenluoto & Pehkonen 2004, Leinonen & Pehkonen 2009, Kaasila ym. 2010). Ovatko tavoitteiden saavuttamisen esteenä liiallinen kiire, opetusmenetelmien puutteet tai käsitteelliset epäselvyydet?

1.1 Ymmärtäminen matematiikan opetuksessa

Peruskoulun opetuksen kiistattomiin yleistavoitteisiin ovat alusta alkaen kuuluneet ajattelutaitojen ja ymmärtämisen kehittäminen (Komiteanmietintö 1970). Matematiikan opetuksen yleistavoitteisiin (Opetushallitus 2014, 374) on kirjoitettu seuraavaa:

Matematiikan opetuksen tehtävänä on kehittää oppilaiden loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua. Opetus luo pohjan matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämiselle sekä kehittää oppilaiden kykyä käsitellä tietoa ja ratkaista ongelmia.

Tavoitteiden mukaan koulun tulee edistää loogista luovaa ajattelua, käsitteiden ymmärtämistä sekä ongelmanratkaisutaitoja. Myöhemmin ymmärtäminen toistuu tavan takaa myös osatavoitteissa. Ajattelua on vaikea tutkia, koska siihen ei löydy Fodorin (2001, 8) mukaan teoriaa. Joutsenlahti (2005, 50) etsi matemaattiselle ajattelulle määritelmää, mutta joutui Sternbergiin (1996) vedoten toteamaan, että ajattelun kuva-

uksista ei löytynyt yhteisiä elementtejä. Niinpä tutkittavaksi valitaankin usein sellaisia ajattelun näkökulmia tai osa-alueita kuten muisti, uskomukset, informaation käsittely tai ongelmanratkaisu. Mentaaliset prosessit ja representaatiot ovat tässä työssä keskeisiä tekijöitä.

Ymmärtäminen kuuluu niihin laajasti käytettyihin yleiskäsitteisiin, joiden sisällön määrittävät lähikäsitteet kulloisessakin ympäristössä kuten lingvistiikassa, psykologiassa, sosiologiassa, hermeneutiikassa, tietoteoriassa tai arkielämän vaihtelevissa tilanteissa (von Wright 1971). Juuri laaja-alaisuus on osoituksena siitä, kuinka tärkeästä asiasta on kysymys. Toisaalta ymmärtämisen käsitteen moniulotteisuus vaikeuttaa sen käyttöä taustateorianä. Näitä haittoja on pyritty vähentämään tarkentamalla kyseistä käsitettä täsmäntävillä analyyseilla ja määritelmillä. Yksi tunnetuimmista ymmärtämiseen tukeutuvista suuntauksista oppimisessa on LWU-traditio, jonka syntyi puoli vuosisataa sitten (Koskinen 2016). Lyhenne tulee sanoista 'learning with understanding'. Se voi kuitenkin saada lukijan hämmennyksiin; mitä kaikkea se voikaan merkitä. Monet tutkijat ovat Wittrockin (1974) tavoin rajanneet LWU:n koskemaan vain kognitiivisia toimintoja kuten tiedon vastaanottoa, käsittelyä, taltiointia ja käyttöä jättäen pois affektiivisen ja konatiivisen aspektin. Amerikkalaisessa opetussuunnitelmassa LWU on tiedonrakentamista kokemusten ja ennakkotietojen varassa: "Students must learn mathematics with understanding, actively building knowledge from experience and prior knowledge" (NCTM 2000, 20).

Oppimisteorioissa ja -malleissa ymmärtämistä tarkastellaan usein kolmesta eri näkökulmasta: tiedollinen tila, prosessi ja resurssi. Ymmärtämisen tila tarkoittaa koherentin tietojärjestelmän omaamista. Se on tavoite, johon pyritään. Prosessi puolestaan on kuvaus, kuinka tavoite saavutetaan ja miten tietojärjestelmä kehittyy. Ymmärtämisen resurssilla tarkoitetaan niitä tietotaitoja, joita yksilö käyttää toiminnossaan.

Eräs tunnetuimmista oppimispsykologian perinteistä on 'merkityksekkään oppimisen' (*meaningful learning*) nimeä kantava idea, jonka Brownell (1935) käynnisti vajaat sata vuotta sitten. Tämän avaintermistä 'meaning' käytetään kirjallisuudessa käännoästä 'merkitys'. Merkityksellä on käsitteellisen laaja-alaisuutensa vuoksi samat hyödyt ja haitat kuin ymmärtämisellä. Ausubel tarkoittaa merkityksekkäällä oppimisella symbolisesti esitetyn idean liittämistä yksilön aiemmin hankkimaan tietojärjestelmään (Ausubel & Robinson 1973). Suomenkielisessä kirjallisuudessa käytetään käännoästä 'mielekäs oppiminen', joka assosioi myös affektiot oppimiskokemukseen selkeämmin kuin sanapari 'merkityksekkäs oppiminen'.

Ymmärtämällä oppimista ja mielekästä oppimista voidaan pitää melkein pä synonyymeina, mutta vähintäänkin niillä on leikkaus, sillä molemmilla on yhteisenä avaintekijänä merkitys. Ymmärtäminen voi kohdistua referentiaalisiin tai kontekstuaalisiin merkityksiin. Deweyn (1998/1910, 132) mukaan merkityksen tietäminen saa aikaan ymmärtämisen, mutta hermeneutiikassa käy päinvastoin, kun ymmärrys tuottaa merkityksen (Kusch 1986). Tässä työssä ymmärtämisen moninaisuutta on hyödynnetty niin, että sanan merkitysvalikoimasta on poimittu oppimisen kannalta tärkeimpiä ja niistä on tehty oppimista jäsentävä kehys. Tulosta kutsutaan mielekkään oppimisen malliksi, vaikkakin siitä on jätetty pois Ausubelin (1968) mallin affektiivinen ulottuvuus.

1.2 Tutkimuksen eteneminen

Tätä tutkimusta motivoi aluksi uteliaisuus siitä, miksi toiset ymmärtävät ja oppivat matematiikkaa paremmin kuin toiset. Aihe oli tärkeä minulle, kun halusin kehittää omia matematiikan kurssejani Lapin yliopiston luokanopettajalinjalla. Kun törmäsin aikakauslehti *Psykologia* artikkeliin ”Voivatko ihmiset ymmärtää toisiaan” (Perttula 1997), alkoi aiheen problemaattisuus paljastua. Selvittäessään ymmärtämisen edellytyksiä Perttula (emt.) päätyy ajattelun episteemisten ja ontologisten ehtojen selvittelyyn.

Kirjallisuuden kautta saatu tieto jätti avoimeksi monia kysymyksiä, jotka kaipasivat rinnalle empiiristä selvitystä, ja työ muuttui oman työn kehittämistutkimukseksi. Olen käynyt esittelemässä tutkimuksieni eri vaiheita kotimaisissa ja ulkomaisissa seminaareissa. Niistä saatu palaute on edistänyt työtäni merkittävästi. Kahdeksan artikkelia on julkaistu esitelmieni pohjalta konferenssijulkaisuissa. Ensimmäisen version mielekkään oppimisen mallista esittelin Jenan ProMath-konferenssissa (10.–12.9.2010), ja mallin viimeisin kehitemä julkaistaan Budapestin ProMath-konferenssin tuloksissa (Leinonen 2018). Lisäksi olen kirjoittanut artikkeleita *Kasvatus-* ja *Aikuiskasvatuslehteen*. Artikkeleista kolme on tehty yhteisjulkaisuna. Tämä väitöskirja on rakennettu kaikkiaan 12:n artikkelin virittämänä, ja viisi niistä valikoitui tähän yhteenvedoon.

Tutkimus käynnistyi tutkimuskentän kartoituksella ja käsitteen ”ymmärtäminen” analyysillä. Aluksi oli tarkoitus selvittää, löytyisikö käsitteelle sopivaa määritelmää. Näytti siltä, että sana ’ymmärtäminen’ oli yleinen oppimista käsittelevässä kirjallisuudessa. Suoranaista ymmärtämisen tutkimusta tai sitä sivuavaa kotimaista ja ulkomaista tutkimusta löytyi runsaasti. Osoittautui kuitenkin, että ymmärtämisen määritelmät olivat kovin kapea-alaisia tai ne olivat epämääräisiä kuvailuja. Ymmärtäminen näytti aina liittyvän tavalla tai toisella käsitteisiin, tietoon ja ajatteluun, joista sittemmin tuli aiheen pääelementtejä. Tutkimuksen empiirisen osion tehtävänä oli selvittää ymmärtämisen roolia opiskelijoille heidän matematiikan perusopinnoissaan, joihin sisältyivät muun muassa peruslaskutoimitukset ja prosenttilasku. Luennot ja pienryhmäohjaus kuuluivat opintoihin, ja niihin tuli jokaisen opiskelijan osallistua. Lapin yliopiston luokanopettajalinjan opiskelijoille tarjottiin kaksi vaihtoehtoa matematiikan kurssin suorittamiseen. Toisen ohjelman mukaan opiskelijat suorittivat opintonsa perinteisen tavan mukaan tentteineen. Toinen tapa oli kirjoittaa päiväkirjaa kurssin etenemisestä, ja kunkin viikon osuus tuli palauttaa opettajalle viimeistään viikon kuluttua. Kerätyn aineiston pohjalta pääteltiin, millaisia orientaatioita opiskelijoilla oli matematiikan opinnoissa ja lisäksi miten kysymyksillä voidaan edistää ymmärtämiseen tähtäävää oppimista. Ymmärtämiseen pyrkivän opiskelutavan ja laskutaitojen kehittymisen välistä yhteyttä selvitettiin kvasiempiirisellä tutkimusmenetelmällä. Tutkimus eteni vaiheittain ja limittäinkin siten, että empiirinen ja teoreettinen työ täydensivät toisiaan. Teoreettinen tutkimus tehtiin systemaattisella analyysillä ja empiiriseen työhön käytettiin mixed-menetelmiä. Tutkimus päättyy synteisiin, jonka tulos on esitetty vastauksena tutkimuskysymyksiin.

Tämä väitöskirja koostuu kuudesta pääluvusta. Johdannon jälkeen tulee kahden luvun mittainen kirjallisuusosuus, jossa kartoitetaan, mitä tästä aiheesta on aiemmin

kirjoitettu. Ensin tarkastellaan ymmärtämisen, matemaattisen ajattelun ja oppimisen lähikäsitteitä: käsite, merkitys ja tieto. Luvussa kolme on selvitetty matemaattista ajattelua, ymmärtämistä ja niiden välisiä kytkentöjä oppimisen kannalta. Ajattelun ja ymmärtämisen analyyseissä on valotettu myös aihepiirin historiallista taustaa. Luvussa neljä esitellään tutkimuksen kolme pääkysymystä ja tutkimusmenetelmät. Ensimmäisen kysymyksen tehtävä oli selvittää sanan 'käsite' merkitystä sekä sen roolia ajattelussa ja ymmärtämisessä. Toinen kysymys fokusoituu tietoverkon kytkentöjen ehtoihin ja verkon linkkien tuottamiseen kysymysten avulla. Kolmannessa kysymyksessä esitetään tiivistettynä tämän työn päätulos. Siinä esitellään ymmärtämisen eri muotoihin perustuva mielekkään oppimisen malli, jota on pohjustettu edellisissä kysymyksissä. Luvun viisi yhteenvedossa tarkastellaan kokoavasti ymmärtämisen merkitystä oppimisessa ja ajattelussa. Raportti päättyy lukuun kuusi, jossa annetaan vihjeitä ja tehdään avauksia jatkotutkimuksien suuntaan.

2 Ajattelun ja ymmärtämisen lähikäsitteitä

Tämän ja seuraavan pääluvun tarkoitus on kartoittaa ja analysoida sitä aluetta, joka oli otettava huomioon pyrittäessä saamaan ote ymmärtämisen roolista käsitteellisen tiedon oppimisessa. Tätä työtä ovat rajanneet filosofinen ja kasvatopsykologinen näkökulma sekä matematiikan oppimisteoriat. Kartoituksessa ei ollut käytössä taustateoriaa, vaan tulkintaan pyrittiin immanentisti eli tavoittamaan tekstin sisältö sen omilla ehdoilla. Tässä vaiheessa selvitettiin sanojen 'ymmärtäminen', 'tieto' ja 'käsite' käyttötapoja oppimista ja ajattelua käsittelevissä teksteissä. Aluksi kirjallisuuden etsintä kohdistui opetussuunnitelmiin ja maineikkaiden tutkijoiden teoksiin. Etsintää täydennettiin tietokantojen hakusanoilla kunnes aineisto alkoi kylläntyä. Se merkinä oli, että uusia avauksia ei enää löytynyt, vaan tekstit alkoivat viitata jo löydettyihin lähteisiin. Historiallista jatkumoa edustavat sellaiset klassikot kuin Hobbes, Locke ja Hume, mutta sekään ei johtanut uusiin avauksiin. Hobbes (1651) tutki uuden ajan alussa kielen, tiedon ja ajattelun ongelmaa sillä tavalla, että häntä voidaan pitää varhaisena kognitiotieteilijänä. Ajattelu, tieto, käsitteet ja ymmärtäminen ovat kietoutuneet toisiinsa monin tavoin, mutta niiden oppiminen ja käyttö on sidoksissa uskomuksiin kohteena olevasta maailmasta (esim. Perttula 1997). Tämä kuuluu ontologiaan, joka on oppi olevaisesta eli filosofisesta käsityksestä siitä, mitä on olemassa. Ontologisten luokkien liittymistä tietämiseen ja oppimiseen on käsitelty yksityiskohtaisemmin otsakkeella oppimiskohteen ontologinen luonne.

2.1 Ymmärryksestä ymmärtämiseen

Filosofi Thomas Hobbes (1602/1651) tutki ihmisen älyllisiä toimintoja, joista hän käytti termiä 'intelligence'. Termin 'understanding' Hobbes oli varannut viestinnän ja keskustelujen kuvailuun, joissa välitetään ajatuksia ja tunteita. Hänen mukaansa koirakin saattoi ymmärtää isäntänsä tahdon. Hobbes teki eron sisäisen ja ulkoisen kielen välillä ajattelussa ja kommunikoinnissa. Kun hän lisäsi tunteet ja tahdon älyllisiin toimintoihin, Hobbesia voidaan pitää nykyisen kognitiotieteen ja konstruktivismiin edeltäjänä. Myöhemmät empiristit Locke (1632/1692) ja Hume (1661/1748) syvensivät ja täydensivät Hobbesin työtä teoksissaan *An essay concerning human understanding* ja *An Enquiry Concerning Human Understanding*. Näissä teoksissa sana 'intelligence' on korvattu sanalla 'understanding', jonka Eino Kaila suomensi ymmärrykseksi kommentoidessaan edellä mainittua Humen teosta (Hume 1698/1748). Ymmärrys vastaa yleiskielessä järkeä ja älyä, joihin puhekielen huomautus "ymmärrys hoi, äly älä jätä" viittaa. Näin käsite "understanding" kattaa laajimmillaan alan, johon kuuluvat ihmisen älylliset kyvyt, toiminnat ja ajattelu.

Englannin kielessä sanalle 'understanding' löytyy latinalais-ranskalaisperäinen synonyymi 'comprehension', jonka latinankielinen sanatarkka merkitys on "grasping together" (Pearsall 2003, 293). Ymmärtäminen tässä jälkimmäisessä tapauksessa konnotoi prosessin, kun taas edellinen ilmaisee prosessin tuloksen. Verbi 'comprehend' merkitsee kokoonpuristamista, yhteenvedon tai synteessin tekemistä (Marzano 2001, 34; Viho-lainen 2008, 8), kun taas nimit 'comprehension' ja 'intension' viittaavat ajatussisäl-töihin (Niiniluoto 1984, 119). Ymmärtämisellä voidaan tarkoittaa myös oivaltamista, jolloin puhutaan ymmärtämisen aktista (Sierpinska 1994, 27).

Empiristeille älyllisten toimintojen pääelementtejä ovat aistimus, idea, kokemus, päättely, tunne ja tahto. Empiristit kielsivät, että tieto olisi synnynäistä, vaan pitivät tiedon lähteenä aistivaikutelmia (impression). Hobbes, Locke ja Hume erottivat kuitenkin toisistaan kaksi ajattelun lajia varmuuden mukaan. Matemaattisesta ajattelusta he käyttivät termiä 'reasoning', jonka suomenkieliseksi vastineeksi sopii päättely tai järkeily. Humen (1999/1748) mukaan matemaattinen ajattelu (reasoning) operoi puhtailla ideoilla logiikan lakien mukaan: "to discover relations of pure ideas in reasoning", ja sen tuottama tieto on varmaa. Toisaalta kokemukseen perustuva ajattelu (understanding) operoi aistivaikutelmista peräisin olevilla ideoilla, joihin sisältyy myös järjen elementtejä kuten kausaalisuus. Näin Hume ennakoi kantilaista empirismin ja rationalismin synteesiä. Kantin (1997/1783) mukaan ajattelun peruselementtejä ovat aistihavainnoista peräisin olevat sisällöt ja ihmiselle lajityypilliset ymmärryksen (Vernunft) kategoriat, jotka antavat sisällöille muodon. Nykyisin ymmärryksen kategoriat eli käsitteet nähdään muuttuvina kulttuurin tuottamina artefakteina, jotka ovat Popperin maailma 3:n oliota (Niiniluoto 1983, 128).

Tämän työn kannalta on merkillepantavaa, että valistusajan empiristit Locke ja Hume antoivat sanalle 'understanding' kaksi tarkentavaa merkitystä: "power of thinking" ja "discover of relationship between experiences". Edellisessä ymmärrystä pide-tään ajattelun ja tietämisen resurssitekijä, kun taas jälkimmäinen viittaa ymmärryksen aktiviteetteihin. Nykyisin kognitiivisia tietoja ja taitoja luokitellaan taksonomioilla. Bloomin (1956) taksonomia on yksi tunnetuimmista koulumaailman tavoitehierark-kioista, jolla pyritään luokittelemaan *ymmärryksen* (understanding) ja ajattelun tasoa (ks. Bloom ym. 1971, 24; 141; Bereiter 2002, 94; Näveri 2009, 79). Taksonomiassa *ymmärtäminen* (comprehension) on toiseksi alimmalla tasolla. Aihetta käsitellään luvussa 3.3 tarkemmin.

2.2 Käsitteen tehtävistä ja luonteesta

Käsitteet ovat ajattelun ja kommunikaation välineitä, joilla pyritään saamaan ote meitä kiinnostavista asioista. Käsitteillä nähdään ja koetaan asioita jonakin. Tiedon lisäksi käsitteellisiin välineisiimme kuuluvat esimerkiksi uskomukset, luulot ja väärinkäsi-tykset, jotka jäsentävät maailmaamme ja ohjaavat toimintojamme. Siksi niillä on suuri merkitys myös oppimisprosesseissa. Matematiikassa käsitteiden määrittelyllä on tärkeä tehtävä, jonka tarkoitus on osoittaa yksiselitteisesti tarkoitettu kohde ja ilmaista täs-

mällisesti kohteesta esitetty väite. Määrittely perustuu analyysiin, jossa käsitteen sisältö esitetään aiemmin tunnettujen osien avulla. Vaihtoehtoinen tapa on puhua merkityksestä, joka on käsitteen ilmaisulla (Lammenranta 1993, 75). Käsitteelliset muutokset ovat keskeistä tehtäväkenttää opettamisen ja oppimisen problematiikassa (ks. esim. Vosniadou 1994; Merenluoto 2001).

Kommunikaatiossa ja ajattelussa käsite kuljettaa suuren määrän tiivistettyä informaatiota ja antaa valmiuksia toimia älykkäästi monissa tilanteissa (Brownell & Sims 1972/1946). Faktat antavat yleistä tietoa yksittäisistä olioista, mutta periaate tai yleistys koskee suurta joukkoa sen piiriin kuuluvia ilmiöitä. Esimerkiksi luku kolme on pariton luku ja edustaa faktatietoa, mutta väite ”kolmion kulmien summa on yhtä suuri kuin kaksi suoraa kulmaa” edustaa suurta joukkoa tasokuvioita. Käsitteiden hallinta on tärkeä, koska se säästää muistia ja tarjoaa faktatietoa yksittäisistä tapauksista. Yleisellä tasolla asia vaikuttaa helpolta, mutta opettamisen kannalta asia ei ole ongelmaton. Siksi aihetta valotetaan alaluvuissa tarkemmin.

Yleiskäsitteen tai lyhyemmin käsitteen (concept, Begriff) kreikankielinen vastine idea (eidos) viittaa mielikuvaan tai ajatussisältöön (Lacey 1996, 53; 136; 368). Kirjallisuudessa käytetään usein sanaa ’idea’ käsitteellisen tiedon määrittelyssä tai ajattelun elementtinä (esim. Hiebert & Carpenter 1992; Pehkonen 2000; Kilpatrick 2009). Esineiden havaitseminen voidaan selittää aistivaikutelmien ja käsitteellisen aineksen kombinaationa. Aistimus aktivoi mielessämme käsitteen tai käsite-edustuksen, ja näemme kohteen ”jonakin” (Salo 1999). Käänteisessä tapauksessa käsitteellä on merkitsemistehtävä, kun annamme ajattelun kohteelle merkityssisällön (Rauhala 1997, 65).

Käsite ’käsite’ ei siis ole kovin yksinkertainen asia. Monet maineikkaat filosofit ovat yrittäneet selvittää asiaa viimeisen kahden tuhat vuoden aikana, mutta joutuneet analyyseissään vaikeuksiin ja kiistoihin keskenään.

2.2.1 Käsitteen määrittely

Niiniluodon (1984) mukaan käsitteiden luonteen ja olemassaolon ongelma oli yksi keskiajan filosofian keskeisimmistä kiistakysymyksistä, josta on käytetty myös nimitystä universaaliongelma (lat. universalis). Termillä ’käsite’ on suuri joukko erilaisia merkityksiä, joista ei helposti löydy yhteistä tekijää. Käsitteitä voidaan kutsua ominaisuuksiksi, relaatioiksi, attribuuteiksi, kvaliteeteiksi tai universaaleiksi (emt., 123). Gagne (1977, 134) pitää käsitteitä sääntöinä, joiden tehtävä on poimia nimetyn luokan alaan kuuluvat oliot. Haapasalon (2004, 73) mukaan käsitteet ovat yksilön mentaalisia tai yhteisön hyväksymiä ilmauksia tai niiden merkityksiä. Semantiikassa puhutaan käsitteistä yleisten termien intensioina (Kivinen 1994, 140). Marzano (2001, 18) on halunnut luopua sanan ’käsite’ käytöstä sen monimerkityksisyyden vuoksi. Hän puhuu mieluummin yleistyksistä, joilla hän tarkoittaa periaatteita ja olioluokkien yhteisiä piirteitä. Silfverberg (1999, 66) viittaa mainintaan, jonka mukaan ’käsite’ on suorastaan sanakirjan tekijän painajainen.

Yleiskäsite ”ymmärtäminen” on Wittgensteinin (1981/1953) mukainen ryväs-käsite, jota on vaikea kuvata kattavasti, saattaka antaa sille täsmällistä määritelmää.

Sekavaan tilanteeseen tuo hiukan selvyyttä, kun ymmärtämistä tarkastellaan osana sen lähikäsitteitä. Muun muassa Herscovics ja Bergeron (1983, 75) toteavat, että 'ymmärtämistä' ei voida erottaa sanoista 'ajatella', 'tietää' ja 'oppia', koska ymmärtäminen on ajattelun tulos. Toisaalta ajattelu ei voi toimia tyhjiössä, koska se toimii aikaisemmin opitun ja ymmärretyn tiedon varassa. Hermeneuttinen perinne korostaa kielen asemaa, jolloin ajattelu, tieto ja kieli kulkevat yhdessä ja kieli on välttämätön kommunikaation elementti (Kusch 1986, 20).

Ideoita, käsitteitä ja ajatuksia ei voida välittää kommunikoinnissa suoraan, vaan tehtävä suoritetaan käyttämällä erilaisia merkkejä. Symbolisilla merkeillä on triadinen luonne: merkin kirjoitettu tai puhuttu muoto, merkin viittaama olio (objekti, referentti) ja merkin ilmaisema käsite tai merkitys (Niiniluoto 1994, 3). Carnapin termein käsitteet ovat kielellisten ilmausten intensioita, kun taas referentiaaliset oliot, olioluokat ja asiat ovat ilmausten ekstensioita (Niiniluoto 1984, 120). Termit, predikaatit ja lauseet ovat kielellisiä ilmauksia.

Käsitteillä voidaan esittää luokkajäsenyyden ehtoja. Ehtojen määrittely tapahtuu usein olioista käsin, kun tietyssä joukosta etsitään sen alkioiden yhteisiä ominaisuuksia ja relaatiota (ks. esim. Sifverberg 1999, 68; Salo 1999, 172). Laine (1984, 16) määrittelee käsitteen seuraavasti:

Käsite on joko samaa kieltä puhuvan ihmisryhmän piirissä yleistynyt tai yksilön mentaalisenä konstruktiona muodostettu esineiden, symbolien, asioiden tai tapahtumien luokka, joka perustuu ko. esineissä, symboleissa, asioissa tai tapahtumissa esiintyviin yhteisiin ominaisuuksiin tai johon voidaan viitata tietyn nimen tai symbolin avulla.

Käsitteeseen liittyvä ilmaus tekee kommunikaation mahdolliseksi, mutta se ei ole aina välttämätön käsitteen edellytys. Oppilas voi esimerkiksi tutustua jaollisuuteen ja antaa sen perusteella lukualueille nimiä kuten rationaaliluku.

Useimpiin käsitteisiin ei löydy kattavia luokitusehtoja. Siitä on esimerkkinä pelin käsite. Tällaisia käsitteitä kutsutaan ryväskaiteiksi (Wittgenstein 1981/1953). Käsitteillä itselläänkin on ominaisuuksia kuten epämääräisyys (vagueness) tai täsmällisyys (exact, rigour). Epämääräisyys ei ole kuitenkaan sama asia kuin monimerkityksisyys (ambiguity) eli monimielisyys, joka on kielellisen ilmauksen semanttinen ominaisuus. On huomattava, että käsitteellä on sisältö ja merkillä merkitys, mutta molemmilla on vielä asemansa mukainen kontekstuaalinen merkitys.

2.2.2 Käsiteluokista

Käsitteet eivät ole autonomisia entiteettejä, vaan ne muodostavat linkkien kautta järjestelmiä kuten käsitepuut, käsitehilat ja käsitekartat tai ylä- ja alakäsitteiden hierarkkisia rakenteita (Haapasalo 2004, 76). Matematiikassa voidaan puhua luokkaelementtien mukaisesti objektikäsitteistä, operaatiokäsitteistä tai suhdekäsitteistä. Suhdekäsitteet koskevat objektien tai luokkien välisiä suhteita, ja faktassa käsite on omistettu yksittäiselle oliolle. Operaatiokäsitteiden erityispiirteenä on, että ne sisältävät sekä propositio-

naalisen että proseduraalisen tiedon elementtejä ja kytkevät nämä tiedon lajit toisiinsa proseptuaaliseksi tiedoksi (ks. luku 2.2.4).

Voiko käsite olla yleistyksen lisäksi itsenäinen entiteetti? Voimmeko siis puhua esimerkiksi lukukäsitteestä tai ääretönkäsitteestä? Haapasalo (2004, 79) kysyy lukijalta, pystyykö hän kuvittelemaan tietyille luvulle mentaalista esiintymää, vaikka lukumäärälle löytyykin helposti edustajia. Lukumäärissä tai fysiikan suureissa luvuilla on praktinen tehtävä. Suuret ovat fysiikan teorian kvantitatiivisia käsitteitä, joilla kuvaillaan reaali maailman ilmiötä ja joilla ilmiöt saadaan ”käsiin”. Mittaamisessa puhutaan realistisen tavan mukaan suureista ominaisuuksina, kun teoreettiset käsitteet on operationalisoitu ja ne ovat mittaamisen lisäksi laskettavissa. Kuvattaessa funktion kulkua ja raja-arvoja käytetään äärettömän käsitettä esimerkiksi kaltevuuden tarkasteluun (Viholainen 2008). Tässä esimerkissä äärettömän käsite ei ole itsenäinen entiteetti vaan tietoisuutta viivan ominaisuuksista. Vaikuttaa siltä, että käsite ei ole autonominen entiteetti, vaan se on jonkin *asian* käsite kuten Kivinen (1994, 139) sanoo. Tilanne on kuitenkin toinen antirealistisen tai konstruktivistisen metafysiikan näkökulmasta (Lammenranta 1993, 11), kun maailmaa konstruoidaan käsitteillä.

2.2.3 Käsitteen representaatiot

Käsitteen olemusta voidaan selvittää myös niiden tehtävien mukaan, joita sillä on havainnon muodostamisessa, tietämisessä, ajattelussa ja käyttäytymisessä (Salo 1999, 171). Puhuttu tai kirjoitettu kieli ei ole merkityksekkäs tai viittaa mihinkään asiaan, ellei sitä tulkita. Kognitiotieteessä tulkinta nojaa sisäisiin representaatioihin tai skeemoihin, kun mentaaliset prosessit suorittavat esimerkiksi luokituksia tai päättelyjä (emt.). Representaatiot ovat sisäisiä tai ulkoisia merkityksen kantajia. Goldinin (1998) mukaan sisäisiä representaatiojärjestelmiä ovat verbaaliset/syntaktiset, kuvalliset, formaaliset, strategiset ja heuristiset sekä affektiiviset systeemit. Sisäiset representaatiot kantavat merkityksiä mukanaan, mutta ulkoisten representaatioiden merkitykset saadaan tulkin tuloksena (Salo 1999).

Representaatioiden jaottelussa sisäisiin ja ulkoisiin tulee helposti se käsitys, että ulkoinen esitys vain heijastaa, ilmaisee tai edustaa ajatusten maailmaa. Monet tutkijat Hähkiöniemen (2006) ja Viholaisen (2008) tavoin tarkastelevat representaatioita ajattelun välineinä, joilla on sisäinen ja ulkoinen ilmenemismuoto. Kun esimerkiksi abstraktille käsitteelle ei löydy mentaalista ilmentymää, voidaan ajatusoperaatiot suorittaa symboleilla. Hähkiöniemi (2006, 40) määrittelee oppimisen ja evaluaation kannalta tärkeän representaatioiden linkittämisen, joka perustuu assosiaatioon ja reflektioon. Edellinen tapaus koskee siirtymää esityksestä toiseen, ja jälkimmäisessä representaatio selitetään toisella. Tavoitteiden asettamisessa ja aidoissa oppimistilanteissa on huomattava, että representaatiot, linkit ja tulkinnat ovat aina kontekstisidonnaisia.

Mentaalisten representaatioiden olemassaolosta ja tehtävistä on laaja yksimielisyyttä, mutta käsitteestä itsestään esitetyt teoriat ovat osoittautuneet ongelmallisiksi (esim. Silfverberg 1999; Salo 1999; Fodor 1998; Fodor 2001). Käsitteiden pitäminen piirrekimppuina johtaa käsitepuun ongelmaan, jossa halutaan selvittää, missä ovat käsitteen juuret. Usein käsitteet redusoidaan aistimuskäsitteisiin, joiden ala ei yleensä ole määrit-

telykysymys, vaan sillä näyttää olevan jokin väljempi kriteeri (Salo 1999, 172). Tähän ehtoon on pyritty löytämään ratkaisu prototyyppien avulla siten, että luokkajäsenyys perustuisi samankaltaisuuteen kategorian prototyyppin kanssa tai luokan piirteiden tilastollisiin ehtoihin. Fodorin (emt., 12) mukaan prototyyppi ei olisikaan käsite vaan välivaihe käsitteenmuodostuksessa, kun mieli linkittää prototyyppin käsitteeseen. Mutta tämäkään ratkaisu ei häivyttä prototyyppin tunnistamisen ongelmaa, johon kuuluu primitiivielementtejä. Näin ollen lupaavalta vaikuttava käsitepuun ja prototyyppin idea eivät johda tyydyttävään tulokseen ainakaan opetuksen kannalta, vaan on etsittävä jokin uusi ratkaisu. Salo (1999) ja Fodor (emt.) arvelevat, että atomistinen käsiteteoria voisi tarjota varteenotettavan kilpailijan prototyyppiteorialle.

Vaikka määrittely- ja prototyyppiteoria ovat alttiita kritiikille, niille ei näyttäisi olevan sopivaa vaihtoehtoa nykyisissä matematiikan oppimisteorioissa.

2.2.4 Abstrahointi käsitteen muodostuksessa

Käsitteellisiä muutoksia selitetään usein abstraktiolla. Sillä tarkoitetaan ympäristöstään irrottamista eli latinalaisittain *ab* (irti) ja *trahere* (vetäminen), jonka tulos voi olla prosessi, ominaisuus tai olio (Gray & Tall 2002, 115). Esimerkiksi kahden esineen joukosta voidaan abstrahoida luku kaksi, joka on ajatusolio ja voidaan esittää numerolla 2. Piaget (1973) erotti toisistaan empiirisen, pseudoempiirisen ja reflektiivisen abstraktion. Ensimmäinen näistä kohdistuu konkreettisiin olioihin, toinen operaatioihin ja kolmas ajatusobjekteihin (Tall 2004).

Gray ja Tall (2001) sekä Tall (2004, 2005) kehittivät Piagetin mallia edelleen ja päätyivät käsitteenmuodostuksen kolmijakoon:

- Käsitteellis-havainnollinen malli (The (conceptual-) embodied world): Havaintokäsitteet abstrahoidaan arkimaailman konkreettisista olioista tai piirretyistä kuvioista. Käsitteiden tehtävä on jäsentää fysikaalista havaintomaailmaa ja tarjota yksilön arkielämäänsä orientaatiopohja, missä matematiikalla on lähinnä välineellinen asema.
- Proseptuaalis-symbolinen malli (The (proceptual-) symbolic world): Toimintakäsitteet ovat dualistisia, missä matematiikan symbolit virittävät mentaalisia toimintakaavioita, niiden tuottamia tuloksia ja jäsenyneyttä rakenteita. Päättely, sen tulos ja niiden ilmaus kapseloituvat proseptikäsitteeksi (procept). Esimerkiksi symboli $100/25$ on monimerkityksinen, kun se voi viitata murtolukuun, kahden luvun suhteeseen, suoritettavaan jakolaskuun tai laskun tulokseen neljä. Prosept-käsitteet tarjoavat ajattelulle joustavia ja laajoja mieltämyskikköjä säästämällä työmuistin kapasiteettia.
- Formaalis-aksiomaattinen malli (The formal (-axiomatic) world): Formaaliset käsitteet perustuvat määritelmiin ja aksiomijärjestelmän loogisiin johdannaisiin, jotka voidaan esittää verbalisilla, kuvallisilla tai matematiikan omilla symboleilla.

Edellä mainitut luokat eivät ole erillisiä toimintaympäristöjä, vaan ne täydentävät toisiaan tehtävien työstämisessä (Hähkiöniemi 2006; Viholainen 2009).

Tall ja Vinner (1981) tarkoittavat käsitteellä yhteisöllistä entiteettiä, kun taas ”käsitekuva” (concept image) on käsitteen mentaalinen ilmentymä yksilölle. Käsitekuva sisältää mielikuvat, representaatiot ja attribuutit (Vinner 1983). Yksilöllisiä käsitekuvia tai prosepteja ei välttämättä tarvitse pitää erillisinä, vaan esimerkiksi määritelty formaali käsite voidaan nähdä osana matemaatikon käsitekuvaa (Tall 2004).

Yhteenvedona käsitteestä voidaan todeta, että jo sen pitkä historia osoittaa, miten tärkeästä oliosta on kysymys. On helppo hyväksyä, että käsite on tehokas ajattelun väline. Sille on kuitenkin annettu niin vaativia tehtäviä, että sen täysipainoisen hyödyntämisen kanssa tulee ongelmia. Tässä luvussa nostettiin esille seikkoja, jotka koskevat käsitteen asemaa ajattelussa ja ymmärtämisessä. Käsitteen esitystavat liittyvät sen kommunikaatioon ja tiedon soveltamiseen. Matemaattisen käsitteen dualistinen luonne tekee siitä joustavan välineen ajattelulle ja ymmärtämiselle. Käsitteenmuodostuksen kolmijakoa (Tall 2004; 2005) noudattaen opettaja voi suunnata oppilaansa ajatusmaailmaa esineiden maailmasta aksiomaattisiin järjestelmiin ja päinvastoin. Käsitteen roolia tietämisessä tarkastellaan seuraavassa luvussa.

2.3 Tieto

Modernissa tietoyhteiskunnassa informaatiota on tarjolla runsain määrin, mutta sen täysipainoinen hyödyntäminen edellyttää tiedollisia valmiuksia, joiden avulla tietoa kyetään etsimään, valikoimaan, omaksumaan ja käyttämään tarkoituksenmukaisesti. Tiedon oppiminen on nähtävä laajemmin osana ihmisen älyllistä toimintaa, jonka tehtävä on sopeuttaa yksilö yhteisöön ja kehittää edelleen kulttuuria (von Wright 1996; Hakkarainen ym. 2005, 54). Tieto on viime kädessä ajattelun ja vuoropuhelun tulos, jota kulttuuriset välineet kuten kieli ja teoriat välittävät yhteisön jäsenille.

Filosofisessa tietoteoriassa puhutaan yleisesti kahdesta tiedon pääajajista: väitetieto ja taitotieto (Niiniluoto 1988). Kaikki tieto ei kuulu näihin kahteen kategoriaan, vaan lisäluokitusta tarvitaan ja niitä käsitellään lyhyesti luvun loppupuolella. Erityistieteiden, kuten kognitiivinen psykologia, tehtäviin kuuluu selvittää, millaisia tiedon lajeja meillä on tai miten me sovellamme niitä (Lammenranta 1993, 9). Näillä näkökulmilla on erona, että edellinen tarkastelee yleisten asioiden yleisiä suhteita kun taas jälkimmäinen tutkii erityisten asioiden suhteita. Molempia näkökulmia tarvitaan, koska ne tukevat toisiaan.

2.3.1 Tieto ja informaatio

Filosofisen epistemologian tehtävä on selvittää tiedollisia käsitteitä ja niiden suhteita yleisellä tasolla. Nykyisin puhutaan naturalistisesta tietoteoriasta, jolloin selvityksen kohteena on paras saatavilla oleva tutkimustieto, empiirinen tieto mukaan luettuna (Tuomela 1983, 6; Lammenranta 1993, 12; Hakkarainen ym. 2004, 112). Tiedon luonteen selvittäminen edellyttää kannanottoa ainakin seuraaviin kysymyksiin: Mitä on tieto? Mitä tiedon lajeja on? Mikä on tiedon alkuperä? Mikä on tiedon tehtävä? Miten tietoa voidaan saada? Mikä on tiedon kohde? Tiedon määreet ovat kuitenkin

ongelmallisia, eikä niihin ole selkeää ratkaisua. Tiedon alkuperää koskevat keskustelut ovat johtaneet empiristien ja rationalistien kiistoihin siitä, onko tieto lähtöisin kokemuksesta vai ihmismielestä.

Informaatiota voidaan pitää laajana yläkäsitteenä, jonka suppea erikoistapaus on tieto (Niiniluoto 1992, 64). Sanan 'informaatio' englannin kielinen vaste juontaa juurensa sanoista 'in' ja 'form', jotka tarkoittavat von Baeyerin (2005, 47) mukaan sisällön pakkaamista muotoon. Kyseinen muoto voi olla fysikaalista järjestystä matematiikan symbolisissa rakenteissa, kerättyä dataa tai semioottisia järjestelmiä. Viimeksi mainittu noudattaa kolmijakoa syntaksi, semantiikka ja pragmatiikka. Oppimisen kannalta on oleellista, että esillä olevaan luonnolliseen tai koodattuun järjestykseen liittyy merkitys, joka saa yksilön kiinnostumaan tulkinnasta (Poikela 2008). Tulkinta edellyttää kuitenkin kontekstuaalista tietoa, jossa muoto saa sisällöllisen merkityksen. Informaatio kantaa siis mukanaan merkityksiä, mutta tieto ilmaisee kontekstin. Vasta oppiminen tuottaa valmiuksia toimia järkevästi olosuhteiden mukaan (emt.).

Erityistieteissä kuten psykologiassa ja kasvatustieteissä tutkitaan tietämiseen liittyviä spesifejä asioita kuten muistia, informaation prosessointia, tiedon omaksumista ja käyttöä, ajattelua, tiedollisia kykyjä ja taitoja. Filosofissa tutkitaan yleisten asioiden yleisiä suhteita. Tiedon filosofinen ja erityistieteellinen näkökulma eivät ole erillisiä asioita oppimisen kannalta. Kun ne täydentävät toisiaan, se edistää oppimista ja tiedon käyttöä.

Tiedon peruselementtejä ovat subjekti, sisältö ja kohde (Niiniluoto 1984, 138). Tiedon subjekti voi olla jokin henkilö tai henkilöryhmä. Subjektiivisella tiedolla tarkoitetaan uskomuksia, joita värittävät henkilökohtaiset näkemykset ja mieltymykset. Objektiivinen tieto viittaa subjektin ulkopuolella olevaan tiedon sisältöön tai tarkoittaa neutraalia ja tasapuolista tietoa. Tiedon subjektin ja sisällön suhdetta kutsutaan propositionaaliseksi asenteeksi (Heinämaa 1994, 62). Niiniluodon (1984, 139) mukaan tietoteorian keskeiset ongelmat liittyvät subjektin ja kohteen väliseen suhteeseen. Intentionaalisten toimintojen kannalta relaatio johtaa kahden koulukunnan näkemyseroon. Brentanon koulukunta väittää, että intentionaalinen akti suuntautuu suoraan kohteeseensa, mutta Husserlin mukaan akti viittaa objektiinsa sisällön välityksellä (ks. Sajama 1994, 17).

Tietoteoreettiset näkemyserot heijastuvat opetusta ja oppimista koskeviin kysymyksiin. Paljon on keskusteltu siitä, onko todellisuus omaa luomustamme kuten antirealistiset konstruktivistit väittävät vai pystymmekö saamaan tietoa todellisuudesta sellaisena kuin se on mielipiteistämme riippumatta, kuten realistit näkevät (Kalli 2005, 10). Maltillinen realismi tarjoaa sovittelevan näkökulman. Sen mukaan tosiasiat ovat eräänlaisia todellisuuden ja käsitejärjestelmien solmukohtia (Niiniluoto 1984, 135). Sisäisessä realismissa totuus on versiorelativistinen (ks. Leinonen 2007). Tuloksetkaalle opiskelulle on eduksi, että oppijalla olisi edes jonkinlainen käsitys tai oivallus opiskeltavan kohteen luonteesta, joka kuuluu ontologian alueelle (ks. luku 2.4.1).

2.3.2 Matemaattisesta tiedosta

Matematiikalla on pitkä historia ja monet tuntevat esimerkiksi Pythagoraan väittämän noin 2500 vuoden takaa. Silloin käytiin kiistaa mm. irrationaalilukujen olemassaolosta eli, ovatko neliön sivu ja lävistäjä yhteismitallisia (Boyer 1994, 121). Eukleideen teos *Alkeet* (n. 300 eaa.) on yksi kuuluisimmista matematiikan kirjoista, jossa kreikkalainen matematiikan tietämys on tiivistetty aksiomaattis-deduktiiviseen muotoon (Bell 1963). Aksiomaattis-deduktiivinen systeemiä on sittemmin voitu pitää absoluuttisena, empiirisenä tai kvasiempiirisenä (Ernest 1991; Lakatos 1997). Absoluuttisen matematiikkakäsityksen mukaan tiedon kohteena ovat yliaistilliset ideamaailman oliot. Saatu tieto on luonteeltaan abstraktia, loogista, arvovapaata ja vailla kulttuurisidonnaisia piirteitä. Empiristien mukaan kaikki tieto oli aistimusperäistä, joten myös matemaattisen tiedon lähteenä on havaintomaailma (Niiniluoto 1992, 58). Lakatoksen (1977) kvasiempirismissä matemaattinen tieto on epävarmaa, jossa epäformaali informaatio on tärkeä tiedon tuottamisessa ja sen ymmärtämisessä eli kysymys on fallibilismistä.

Matematiikkaa tarkastellaan usein julkisen ja henkilökohtaisen tiedon näkökulmista. Edellisen mukaan matematiikka on formaali, deduktiivinen ja eksakti tietojärjestelmä, ja jälkimmäisestä mukaan se on inhimillinen aktiviteetti (Fischbein 1994; Harel 2009). Nämä näkökulmat täydentävät toisiaan, eikä matematiikka ole valmis systeemi vaan elävä organismi. Fischbein jakaa vielä aktiviteetin formaaliin, algoritmiseen ja intuitiiviseen komponenttiin. Formaali komponentti operoi logiikan säännöillä aksiomaattisessa systeemissä. Algoritmisen komponentti on proseduraalista tietoa ja viittaa kykyihin suorittaa matemaattisia operaatioita. Fischbein (emt.) tähdentää molempien komponenttien tasapainoista kehittämistä niin, että järjestelmän proseduurit ja käsitteet tukevat toisiaan ja ratkaisut tulevat sitä kautta ymmärretyiksi. Intuitio operoi tiedostamattoman alueella, mutta on tärkeä osa päättelyä (ks. 3.1.2).

Matematiikan tarkasteluissa törmätään toistuvasti dualismiin, joka kytkee julkisen ja henkilökohtaisen tiedon toisiinsa (ks. Viholainen 2008, 17-21). Julkaisusarjoissa tai kirjoissa esitetty matemaattinen argumentaatio on esitetty tiiviissä formaalissa muodossa. Siinä on niukasti vihjeitä, jotka auttaisivat asiaan vihkiytymätöntä ymmärtämään päättelyketjua tai sitä kannattelevaa ideaa. Matemaattinen argumentaatio, ongelmien ratkaiseminen tai muu päättely eivät kuitenkaan noudattele niukkuuden formaalia linjaa, vaan siihen sisältyy rikas informaali välineistö (Viholainen emt.; Merenluoto 2001). Viholainen puhuu kahdesta matemaattisen ymmärtämisen komponentista: proseduraalis-formaalinen ja intuitiivis-holistinen. Näiden kahden komponentin kombinaatio rakentaa matematiikkaa. Proseduraalis-formaalinen komponentti luo viimeistellyn esityksen, joka pyrkii saamaan lukijansa vakuuttuneeksi perustelujen oikeutuksesta. Opetuksen näkökulmasta tulisi pitää kiinni tiukasta loogisesta päättelystä, mutta antaa tilaa luoville oivalluksille informaalissa maailmassa.

2.3.3 Klassinen tietokäsitys

Klassinen käsitys tiedosta perustuu Platonin määritelmään: Tieto on tosi hyvin perusteltu uskomus (Niiniluoto 1983, 138). Platon nimesi epätodet uskomukset erehdyksiksi, ja ilman perusteita olevat uskomukset luuloksi. Klassisessa perinteessä

tietoa pidettiin muuttumattomana kahdestakin syystä: kohteiden muuttumattomuus ja varman perustelun olemassaolo. Platonille tiedon kohteet olivat yliaistillisia ideoita ja Aristotelille olioiden pysyviä ominaisuuksia eli substantiaalisia invariansseja. Kun aristotelikkojen mukaan tiedolle voitiin antaa varma perustelu, tiedon kokonaisuutta pidettiin jokseenkin lopullisena (emt.). Perusteluvaatimus edellyttää yksilöltä sitä, että hänen on pystyttävä arvioimaan väitteen pätevyyttä sekä pohtimaan väitteen puolesta että sitä vastaan esitettyjä evidenssejä.

Totuuden määrittämiseksi on esitetty useita teorioita, joilla kullakin on ongelman-
sa. Korrespondenssiteorian mukaan väite on tosi, jos se vastaa mielestä riippumatonta todellisuutta. Teoriaa vastaan voidaan tehdä hankala kysymys: miten voidaan verrata väitettä ja käsitteellistämätöntä todellisuutta toisiinsa. Koherenssiteorian mukaan teorian väitteiden tulee olla yhteensopivia. Yhteensopivuus ei kuitenkaan takaa, että teoria tarjoaisi informaatiota todellisuudesta. Pragmatistisen totuusteorian kriteerinä on tiedon käyttökelpoisuus. Tällöin kriteerin ongelma siirtyy käyttökelpoisuuden määrittelyyn, koska käyttökelpoisuus riippuu tilanteesta ja mielipiteestä. Verifikationismissa totuus saavutetaan perustelujen kautta, jolloin ongelmaksi nousee se, voidaanko kaikkia tosia lauseita osoittaa oikeiksi. (Niiniluoto 1984, 108-112).

Klassinen tiedon käsite on saanut osakseen kritiikkiä sen passiivisen luonteen vuoksi, joka tarkoittaa oikeiden ja perusteltujen käsitysten mielessä pitämistä (Niiniluoto 1988, 335). Kun Platonin määritelmälle annetaan dynaaminen ja toiminnallinen tulkinta, päädytään moderniin aktiivisuutta korostavaan tiedon käsitteeseen. Tieto nähdään nyt jatkuvana itseään korjaavana prosessina, joka tuottaa informatiivista ja entistä todenmukaisempaa kuvaa maailmasta.

2.3.4 Aktiivisen tiedon käsite

Käsitys tiedosta muuttuvana kulttuurivarantona on tullut vallitsevaksi, kun substantiaaliset invarianssit korvattiin Galilein relationaalisilla invariansseilla ja Peircen idealla, jonka mukaan tiede pyrkii kohti totuutta (Kaila 1939; Niiniluoto 1984, 84). Nykyisissä tietoteorioissa lähtökohtana on ihmisen erehtyväisyyden tunnustava fallibilismi, jonka mukaan tieto on kritisoitavissa, korjattavissa ja muutettavissa (Niiniluoto 1984, 149-150). Kun tiukat perusteluehdot korvataan normatiivisilla oikeutushdoilla, päädytään dynaamiseen tiedonkäsitteeseen. Tällöin tavoitteena on välttää erehdyttä ja hankkia totuudenkaltaista luotettavaa tietoa, joka on informatiivista (Lammenranta 1993, 129-131; Niiniluoto 1993, 121).

Tietoyhteiskunnassamme hyvin perusteltua tietoa on enemmän saatavissa kuin kukaan pystyy omaksumaan saatikka arvioimaan sen kaiken pätevyyttä. Tiedollisen oikeutuksen normatiivisuuteen liittykin tiedollinen sallivuus, jonka mukaan tietoa on lupa hankkia luotettavista lähteistä. Tällainen tiedonhankinta edellyttää kykyä etsiä luotettavia lähteitä, kaivaa esiin tietoa oikeilla kysymyksillä ja erottaa tosiasiaväitteet fiktiosta (Niiniluoto 1988, 334). Yksilön kannalta väite on oikeutettu, jos tiedon vastaanottaja ymmärtää viestin sisällön ja lähde on luotettava tai hän pystyy arvioimaan perustelujen pätevyyttä. Oikeutusehto ei edellytä klassisesta perusteluehdosta luopumista, sillä hyvä perustelu voi edelleenkin oikeuttaa väitteen, joka riippuu usein ym-

päristöstä. Esimerkiksi matemaattisten väitteiden pätevyyden arvioinnissa on otettava huomioon, onko päättely tehty esineellis-käsitteellisen, symbolis-proseptuaalisen vai formaalis-aksiomaattisen maailman ehdoilla (Tall 2004).

Kriittinen tieteellinen realismi tarjoaa edellytykset aktiiviselle tiedon käsitteelle, jonka mukaan tieto on jatkuvan korjauksen ja kehityksen tilassa (Niiniluoto 1988, 339). Aktiivinen tiedon käsite terävöityy, kun sen määrittelyyn lisätään arvottava ehto: tiedon on oltava olennainen, tärkeä tai merkittävä. Eri ammattien ja harrastusten taitoihin liittyvä tieteellisen tiedon lisääntyminen tarjoaa mahdollisuuden lisätä taidon käyttökelpoisuutta. Soveltavat tieteet ja asiantuntijajärjestelmät ovat esimerkkejä taitotiedon lajeista, jotka ovat systemaattisesti kerättyjä taitotiedon kokoelmia (Niiniluoto 1988, 336).

Tosiasiaväitteissä tulee tehdä ero heikon ja vahvan tiedon välillä, joista edellinen vastaa että-kysymyksiin ja jälkimmäinen lisäksi miksi-kysymyksiin (Niiniluoto 1988, 337; Hannula, Majjala ym. 2004, 17). Heikko tieto on sisältötietoa, mutta vahvaan kuuluvat myös perustelut. Oikeutusteorian mukaan heikko tieto kuuluu eksternalismiin, ja vahva tieto internalismiin (Lammenranta 1993, 178). Edellisen mukaan väitteen perustelut ovat yksilön ulottumattomissa. Jälkimmäisessä yksilö voi tulla tietoiseksi perusteluista tai ymmärtää ne vain harkitsemalla asiaa. Aktiivinen tiedon käsitys velvoittaa oppijaa etsimään totuutta ja pohtimaan perusteluja, vaikka totuus ja perustelu eivät olekaan välttämättömiä tiedon ehtoja (Niiniluoto 1988; Lammenranta emt.).

Aktiivinen tiedonrakentelu on tietoista toimintaa, joka sisältää kolme tiedonlajia: että-tieto, kuinka-tieto ja miksi-tieto eli faktat, taidot ja perustelut (Mason & Spence 1999; Viholainen 2006, 17-18). Tiedollisten taitojen opettamiseen eivät kuulu vain aineenhallinta ja tekniset keinot, vaan opiskelijoita tulisi rohkaista myös omaehtoiseen tiedon hankintaan ja kriittiseen ajatteluun, jota korostetaan myös PISA-tutkimuksissa (OECD 2016).

2.3.5 Propositionaalinen ja proseduraalinen tieto

Kielelliset ilmaukset kuljettavat sisältöjä mukanaan vain latentisti. Sisällölliset merkitykset edellyttävät aina tulkintaa. Käytännössä lingvistiset ja psykologiset luokitukset liittyvät toisiinsa, ja painopiste vaihtelee näkökulman mukaan. Psykologiassa tutkitaan tulkintaa ja tietoa mentaalisenä tapahtumana, jolloin tieto voidaan luokitella seuraavasti: psykomotorinen, proseduraalinen ja propositionaalinen tieto (Marzano 2001). Esimerkiksi pyörällä ajaminen on osoitus psykomotorisesta tiedosta, mutta sitä kuvaillaan ja selitetään propositionaalisella tiedolla. Matematiikassa psykomotoriselle tiedolla ei ole suurta merkitystä erityistapauksia lukuun ottamatta, joten se ohitetaan tässä tutkimuksessa.

Tiedon jakoa lajeihin perustellaan sillä, että niillä on eri tehtävät, erilainen muistin edustus, erilaiset oppimisprosessit ja ne poikkeavat toisistaan neuraalitoimintojensa puolesta (Anderson 1980; Tulving 2000, 37-40; Marzano 2001, 16-26). Nimitykset proseduraalinen ja propositionaalinen palautuvat tiedon lajien alkeisyksiköihin, joita ovat produkti ja propositio. Pedagogisessa kirjallisuudessa esiintyy lukuisia määriä nimityksiä tiedon edellä mainitun kaltaiselle polarisoinnille, mutta periaatteessa toiseen

tiedon lajiin kuuluu toimintojen suorittaminen ja toisen tehtävä on selittää tai kuvailla tapahtumia (esim. Haapasalo 2004). Esimerkkejä polarisoinneista ovat: syntaktinen tieto/semanttinen tieto, tietää mitä/tietää mitä ja miksi, tietää kuinka/tietää että, instrumentaalinen tieto/relaationaalinen tieto, ja operationaalinen tieto/struktuuriallinen tieto. Kaikki tieto ei sisälly näihin kahteen luokkaan kuten esimerkiksi strateginen tieto.

Hiebert ja Lefevre (1986, 6) jakoivat proseduraalisen tiedon kahteen osaan, joista ensimmäiseen kuuluvat symbolit ja niitä hallitsevat kielioppisäännöt. Toisessa ovat symbolien käytösäännöt tehtävien suorittamista varten. Proseduraalinen tieto vastaa kysymykseen *miten*, ja sen prosessit etenevät suoritusjonoina. Toiminnat käynnistyvät sopivissa tilanteissa, jonka jälkeen ne etenevät tiettyjen sääntöjen tai algoritmien ohjaamina. Prosessit ovat toimintavalmiuksina kestopuistuin produktiosysteemeissä. Propositionaaliseen tietoon kuuluu faktoja, relaatioita, periaatteita ja yleistyksiä, jotka tallentuvat kestopuistuin semanttisiin verkkoihin. Hiebert ja Lefevre (emt., 4-5) kutsuivat proposionaalisen tietämisen tilaa ymmärtämiseksi, jonka aste riippuu verkon linkkien lukumäärästä ja voimakkuudesta. Propositionaalista tietoa kutsutaan usein koseptuaaliseksi tiedoksi.

Polaarisen näkemyksen mukaan proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto ovat kaksi tiedon lajia, joiden välillä ei ole jatkumoa. Paljon on keskusteltu siitä, kumpi tiedon laji olisi ensisijainen kouluopetuksessa, eikä ratkaisua ole löytynyt (esim. Haapasalo 2004; Kilpatrick 2009). Tosin kumpikaan vaihtoehto ei tuo ratkaisua esimerkiksi tilanteeseen, jossa oppilas osaa mekaanisesti laskea laskutehtävän oikein, mutta ei ymmärrä toimintansa perusteita. Toisaalta hän voi ymmärtää tehtävän ja sen ratkaisuperiaatteenkin, mutta taitojen puute estää tehtävän suorittamisen. Kumpaa tiedon lajia tulisi siis opiskella ensin, koska kumpikaan tiedon laji ei automaattisesti tuo mukanaan toista. Tarjolla ei ole yleispätevää ohjetta, koska lähestymistavan määrää muun muassa aihepiiri, konteksti ja oppijan taustatiedot (ks. esim. Haapasalo 2004).

Monet tutkijat (esim. Hiebert & Carpenter 1992, 78; Haapasalo 2004, 53; Kilpatrick 2009, 48) ovat etsineet keinoja, joilla tiedon lajit liitettäisiin toisiinsa siten, että kombinaatio sopisi paremmin aktiiviseen tiedon käsitteeseen ja edistäisi sitä kautta mielekästä oppimista. Haapasalo (2004) määrittelee konseptuaalisen tiedon seuraavasti:

Konseptuaalinen tieto on semanttinen verkko, jonka solmujen ja linkkien tulkitsemiseen ja rakentamiseen yksilö kykenee osallistumaan, tiedostaen ja ymmärtäen toimintansa perusteet ja logiikan. Solmut ja linkit voivat olla esimerkiksi käsitteitä tai niiden attribuutteja, proseduuria, toimintoja, näkökulmia jopa ongelmia.

Pitäen silmällä tiedon lajien linkittämistä toisiinsa Haapasalo (emt.) antaa proseduraaliselle tiedolle seuraavan määritelmän:

Proseduraalinen tieto tarkoittaa dynaamista ja tarkoituksenmukaista sääntöjen, menetelmien tai algoritmien (toimintatapojen) suorittamista käyttäen hyväksi tiettyjä esitystapoja. Tämä edellyttää tavallisesti näiden esitystapojen pohjana

olevien tietojärjestelmän syntaksin ja esitysmuotojen ymmärtämistä, mutta ei sen sijaan välttämättä näiden ominaisuuksien tietoista ajattelemista, ainakaan mikäli suoritus on automatisoitunut.

Tietolajien kytkeminen toisiinsa on molemminpuolista. Proseduuri voi olla semanttisen verkon osa, mutta se voi myös rakentaa konseptuaalista tietoa. Haapasalo (emt.) kirjoittaa linkittymisestä vielä, että

konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon eroa on käytännössä usein vaikeaa jopa epätarkoituksenmukaista tehdä juuri muulla perusteella kuin luonnehtimalla suorituksen automatisoitumista ja sitä kuinka tietoisesti yksilö perustelee tai joutuu perustelemaan toimintansa vaiheet.

Lainauksen lopussa mainitut toimintojen tietoiset perustelut viittaavat tietomuotojen kytkeytymiseen toisiinsa, jonka puitteissa on mahdollista etsiä perusteluja toimintatavoille. Asiantuntijalla proseduraalinen tieto on automatisoitunutta, ja se on tiiviisti linkittynyt hänen semanttiseen verkkoonsa. Sitä vastoin noviisin tiedonalueet voivat olla täysin erillisiä ja esimerkiksi laskeminen on symbolien manipulointia ilman sisältöä.

Konseptuaalisella tiedolla on monia etuja, koska tieto verkoissa on yleistä, jäsentyntä, sisäistettyä ja tiiviissä esitysmuodossa. Koska yksilö ymmärtää tietojärjestelmänsä loogiset suhteet ja perustelut, hän pystyy tietoisesti operoimaan representaatiojärjestelmässään (vrt. Haapasalo 2004) ja vastaamaan esimerkiksi miksi-kysymyksiin. Tämä edellyttää analysoimiseen tarvittavien konseptuaalisten tietojen lisäksi menetelmällisiä päättelytaitoja. Muita konseptuaaliseen tietoon liittyviä ajattelua vaativia toimintoja ovat esimerkiksi selittäminen, todisteiden löytäminen, yleistäminen, soveltaminen, analogioiden löytäminen ja aiheen esittäminen toisella tavalla (Joutsenlahti 2005, 84). Koska käsitteen asema tiedon määreissä voi vaihdella (esim. Niiniluoto 1992, Hiebert & Carpenter 1992, Haapasalo 2004, Kilpatrick 2009), tutkijat puhuvat usein konseptuaalisen tiedon sijasta käsitetiedosta, yleisestä tiedosta tai käsitteellisestä tiedosta. Monet kiistat polaarisen tiedonkäsityksen piirissä ovat johtaneet siihen, että nykyään tieto nähdään mieluummin dualistisena.

2.3.6 Muita tiedon lajeja

Tuntemista ei ole helppo määritellä tai edes luonnehtia ilman valaisevia esimerkkejä. Jonkin asian tunteminen perustuu kokemukseen, ja se ilmenee toiminnoissa tai relevanteissa kommentteissa. Henkilön tuntemisella tarkoitetaan yleensä kahdenvälistä kontaktia, vähintään tapaamista tai juttelua (Lammenranta 1993, 72). Kun opettaja tuntee oppilaiden vaikeudet esimerkiksi pituuden yksiköissä, hän osaa ne kerrata ennen pituuslaskuja. Toisaalta opettaja pystyy tarvittaessa vastaamaan kiperiinkin kysymyksiin vastauksen tarkkuudesta. Tuntemisella tiedonlajina on laaja edustavuus heikosta vahvaan (Lammenranta 1993, 126).

Osaamisella tarkoitetaan eläimen tai ihmisen kykyä suoriutua jostakin ruumiillisesta tai henkisestä tehtävästä, kuten uiminen, lukeminen tai laskeminen (Niiniluoto 1988,

335). Osaaminen ei ole itsenäinen tiedon laji, vaan sen luonne vaihtelee tehtäväkentän mukaan. Esimerkiksi telinevoimistelun liikesarjat tai peltisepän työt vaativat erilaista osaamista kuin laskutehtävien suorittaminen.

Joutsenlahti (2005, 96) ja Näveri (2009, 8) kään­sivät amerikkalaisen Kilpatrick ym. (2001) opetus­suunnitelmatyöryhmän termin ”mathematical proficiency” matemaattiseksi osaamiseksi (ks. luku 3.7). Nykyisin puhutaan osaamisesta ja osaamiskeskuksesta, joilla on paljon laajempi ekstensio kuin vain tehtävistä selviytyminen. Tällöin kysymyksessä on oikeastaan taitotieto tai jopa asiantuntijatieto, johon ei kuulu vain selviytyminen tilanteista vaan ilmiöiden tai havaintojen kuvaus, selitys ja tulkitseminen (OECD 2016, 14). Näyttää siltä, että käsitteelle ”osaaminen” haluttaisiin antaa melkeinpä ”asiantuntijatiedon” sisältö.

Taito (kreik. *techne*, lat. *ars* ja engl. *art*) on osaamista, johon liittyy pysyvä tekemisen valmius (Niiniluoto 1988, 335). Keski­ajan yliopistoissa aritmetiikka ja geometria kuuluivat musiikin ja tähtitieteen ohella quadrivium-taitoihin (ks. Lehti 2001, 45). Taito ei ole itsenäinen tiedon laji, vaan se on tehtäväkohtainen kuten esimerkiksi lasku- tai ongelmanratkaisutaito. Tekemisen taidot vaihtelevat sen mukaan, kuinka paljon ne vaativat kokemusta, harjaantumista tai konseptuaalista taustatietoa. Taidolla on itse asiassa kaksi ulottuvuutta, joista toinen viittaa osaamiseen ja toinen on taitotietoa eli väitetietoa toiminnan säännöistä (Niiniluoto 1992, 51).

Hyvä taito ei siis aina edellytä haltijaltaan toimintojensa yleistävää kuvausta, koska taidon taustalla voi olla myös hiljaista (*tacit*) tietoa. Asiantuntijan toiminta on nopeaa ja joustavaa, ja siinä yhdistyy teoreettinen tietämys, käytännöllinen taito ja kyky ratkaista ongelmia. Koska luku- ja laskutaito edellyttävät päättelyä aiempien tietojen varassa (Resnick 1987), niitäkään ei voida oppia mekaanisen toistamisen avulla, vaan ajattelulla on keskeinen tehtävä kyseisten taitojen oppimisessa.

Kompetenssi viittaa tilannekohtaiseen kykyyn ja tavoitteenmukaiseen toimintaan tietyllä tehtäväalueella (Tautila 2004). PISA-tutkimuksessa puhutaan ongelmanratkaisun kompetenssista, johon kuuluu kyky selittää ilmiöitä tieteellisesti, tehdä suunnitelmia tiedon hankkimiseksi sekä toteuttaa suunnitelmia ja arvioida tulosta (OECD 2016, 13). Lisäksi on osattava tulkita ja arvioida saatavilla olevaa tietoa tieteen keinoin. Tämä merkitsee, että yksilön on hallittava ongelman kannalta riittävä määrä propositi­onaalista tietoa, menetelmätietoa ja relevantteja strategioita. Strateginen kompetenssi edellyttää tietyn ongelman olennaisten tekijöiden tunnistamista ja ymmärtämistä sekä valmiutta tehtävän suorituksen kontrolloimiseen (Kilpatrick 2009). Sisältönsä ja tehtäviensä puolesta kompetenssia voidaan pitää toiminnallisena kykyä, jota tukee taitotieto.

Hiljainen tieto on englanniksi *tacit knowledge*. Sillä tarkoitetaan tietoa, joka ymmärretään suoraan, emmekä osaa kertoa tai kuvata sitä (Polanyi 1983, 4). Hiljainen tieto liittyy traditioihin, jotka kantavat asianmukaista tietoa mukanaan (Polanyi 1969). Yhteisöllinen hiljainen tieto siirtyy yksilölle jäljittelyn, samaistumisen ja tekemisen kautta suoraan ilman verbaalisia välivaiheita. Esimerkiksi korrektiin puhetaitoon ei välttämättä kuulu kielioppisääntöjen hallintaa. Opetustilanteissa opettajien ja oppilaiden väliset suhteet sekä opettajan tietoisuus opetuksen sisällön luonteesta kuuluvat hiljaisen

tiedon piiriin (Tom 2006). Erotuksena verbalisoituvasta tiedosta hiljainen tieto on ”tahmeaa” ja sen omaksuminen vaatii erityistä herkkyyttä interaktiossa (Hakkarainen ym. 2004, 124). Niinpä onkin luonnollista, että jonkin opetusryhmän jäsenet oppivat eri asioita tai samaa asiaa eri nopeudella, vaikka heille on tarjolla sama informaatio. Hiljainen tieto voi olla läsnä myös intuitiossa (Koivunen 1997, 90).

Mekaanisella tiedolla tarkoitetaan rutiininomaisia suoritusvalmiuksia, joihin ei liity perustelujen hallintaa. Tällaista tietoa voi olla esimerkiksi kertotaulun osaaminen tai lasku-algoritmin käyttö.

Automatisoitunut tieto eroaa mekaanisesta siten, että siihen kuuluu myös tietoiset perustelut (ks. Saariluoma 1992; Näveri 2009, 23). Automatisoitunut ja mekaaninen tieto säästävät informaation käsittelyssä työmuistin resursseja. Tosin mekaaninen tieto on kontekstisidonnainen ja altis virhesuorituksille, koska siihen ei kuulu perustelujen oikeasta suorituksesta.

Intuitiivinen tieto poikkeaa mekaanisesta, automatisoituneesta ja hiljaisesta tiedosta siinä, että se voi tuoda uusia elementtejä jo ennestään tunnettuihin tietoihin. Fischbeinin (1994) mukaan intuitiivinen kognitio tuottaa tunteen, että jokin väite voidaan hyväksyä ilman muodollisia perusteluita. Näin hyväksyty väite voi olla joko sopusoinnussa tai ristiriidassa formaalin järjestelmän kanssa. Jälkimmäisessä tapauksessa se on esteenä tehtävän suorittamisessa. Muutoin intuitio edistää prosesseja. (ks. luku 3.1.2).

Tällainen tiedon erittely ja Andyysi on opetuksen suunnittelun ja evaluaation kannalta hyödyllinen. Tunnistamalla oppilaan puutteita jollakin osa-alueella, voi opettaja puuttua asiaan tarkentavalla lisämateriaalilla. Käytännön oppimistilanteissa on hyvä pitää huolta siitä, että kaikki osaamisen ja tietämisen lajit kehittyvät tasapuolisesti.

Yhteenvetona voidaan todeta, että tietoa ja ymmärtämistä ei voida erottaa toisistaan. Syvälinen tieto edellyttää aiheeseen paneutumista ja ymmärtämistä. Toisaalta ymmärtääkseen asioita, on hankittava lisää tietoa. Matemaattinen tieto kuuluu aktiivisen tiedonkäsityksen piiriin ja edustaa vahvaa tiedon lajia, koska se pyrkii perusteluillaan antamaan vastauksia miksi-kysymyksiin. Tiedostamattoman alueen intuitiivista tietoa ei tunneta vielä kovin hyvin, joten se asettaa opettamiselle oman erityishaasteensa (ks. 3.1.2).

2.4 Oppiminen

Oppimisella tarkoitetaan von Wrightin mukaan (1996, 352) ei-hetkellistä muutosta tiedoissa, taidoissa, käsityksissä ja tunteissa. Vaikka tunteilla on merkittävä vaikutus oppimisessa (esim. Pehkonen 1996; Hannula ym. 2004b; Viitala 2015), ne on tässä työssä ohitettu. Sitä vastoin kohteen ontologista aspektia ei ole ohitettu, sillä ilman jonkinlaista käsitystä kohteen luonteesta ja alkuperästä oppija saattaa joutua umpikujaan. Jos oppimisen kohteesta ei saada otetta, matematiikasta voi tulla pelkkää symbolien manipulointia. Opettajan tehtävä on fokusoida oppilaitensa ajatukset tarkoituksenmukaisesti relevantteihin kohteisiin. Tällöin tullaan ontologian alueelle eli oppiin olevaisen luonteesta. Yksipuolisen orientaation korostaminen voi vaikeut-

taa matemaattisten ajattelutaitojen kehittymistä. Esimerkiksi liiallinen esineellisen havaintomaailman korostaminen saattaa vaikeuttaa siirtymistä ajattelussa formaalien operaatioiden tasolle: Äärettömän käsitteelle on vaikea löytää esitystä konkreettisten esineiden maailmasta.

2.4.1 Oppimiskohteen ontologinen luonne

Mielekkään oppimisen kannalta on tärkeää, että oppilaalla on käsitys tarkastelun kohteena olevan objektin luonteesta. Esimerkiksi luvuilla voi olla sellaisia ominaisuuksia kuin parillisuus tai jaollisuus, mutta niillä ei ole fyysikaalisen maailman ominaisuuksia kuten esimerkiksi pituus ja paino. Matematiikka on fysiikan kieli, ja fysiikan käsitteet eli suureet esitetään lukuarvojen ja yksikköjen tulona. Joskus matemaattisia väitteitä voidaan perustella esineellisen maailman olioilla, toisinaan niillä on korkeintaan heuristista arvoa todistamisessa (ks. Viholainen 2008). Popperin luokittelu selkeyttää tilannetta ja antaa jäsennystä esimerkiksi siitä, millaisien asioiden parissa työskennellään, mikä on niiden alkuperä, mikä on järjestelmän mahdollinen rakenne tai miten niihin päästään käsiksi ja perustellaan väitteitä.

Ajatellaan, että maailma muodostuu olioista sekä niiden ominaisuuksista ja suhteista. Selvyyden vuoksi on hyvä tehdä ero olioiden välisten suhteiden ja olioiden ominaisuuksien välillä. Ne voivat olla tarkkaavaisuuden ja tutkimuksen kohteina, jolloin niitä kutsutaan objekteiksi. Objektien lukumäärä supistuu kahteen, kun ominaisuuksista ja suhteista muodostetaan yhteinen universaalien luokka. Jäljelle jää siis kaksi objektiluokkaa: oliot ja attribuutit. Tässä työssä universaalista käytetään nimitystä attribuutti.

Attribuuttien luonteesta ja suhteesta olioihin on käyty loputtomia kiistoja. Platonin mukaan todellisuudessa on olemassa muuttumattomien yliaistillisten ideoiden maailma. Aistien tavoittama maailma on vain jonkinlainen ideoiden varjokuva (Niiniluoto 1990, 271), ja ideoista saadaan tietoa Platonin mukaan vain järjen avulla. Jyrkän platonismin mukaan vain suvut ja lajit (attribuutit) ovat olemassa tai ainakin todellisempia kuin niihin kuuluvat oliot (Niiniluoto 1984, 124). Aristotelikkojen maailma koostuu olioista ja niihin kuuluvista attribuuteista, joista saadaan tietoa aistihavaintojen avulla. Attribuuttien luonteesta, tehtävistä ja olemassaolosta käytiin keskiajalla kovaa kiistaa. Tukeutuen Wilhelm Occamilaisen säästäväisyyden periaatteeseen nominalistit hyväksyivät vain yksilöiden olemassaolon, mutta kielsivät, että attribuutteja olisi todellisuudessa (Niiniluoto 1990, 28).

Edellä mainittua luokittelua voidaan tarkentaa intuitionismilla ja formalismilla (Niiniluoto 1984, 127). Intuitionismin mukaan esimerkiksi luonnolliset luvut ovat annettuja, mutta muut luvut ovat ihmismielen aktiviteettien tulosta. Nominalistista kantaa edustavassa formalismissa matematiikka on sääntöjen mukaista merkkipelä, ja esimerkiksi aritmetiikka on tiedettä numeroista. Tässä luokituksessa tulevat esiin myös empiristien ja rationalistien näkemyserot matematiikasta. Rationalistit kohdistavat huomionsa platonisiin ideastruktuureihin, mutta empiristien tutkimuskohteina ovat mielen idealisoimat struktuurit (Vilkkö 1997, 84; Nevanlinna 1963, 19-20). Edellisille matematiikka on ideastruktuurien tutkimusta ja jälkimmäisten tutkimuskohteena ovat idealisoidut systeemit.

Popper on luokitellut maailman oliot kolmeen luokkaan: fysikaalisten olioiden tai tilojen maailma, tietoisuuden tai mentaalisten tilojen maailma sekä ajatusten objektiivisten sisältöjen maailma (Niiniluoto 1990, 14-20). Luokat erotetaan sisältöjensä mukaan indekseillä seuraavasti:

Popperin maailma 1 muodostuu fysikaalisista objekteista ja vuorovaikutuksista, jotka noudattavat luonnonlakeja. Siihen kuuluvat meille tutut ympäristön esineet ja oliot kuten pöydät ja tuolit tai kissat ja koirat. Yleistävästi voidaan todeta, että maailma 1:n oliot ulottuvat subatomaarisen tason hiukkasista galakseihin ja niiden välisiin vuorovaikutuksiin kuten voimat, voimakentät ja radioaallot. Popperin mukaan universumi ei ole muuttumattomien substanssien kokoelma, vaan joukko interaktiossa olevia prosesseja. Fysikaalisten entiteettien maailmaa voidaan järjestää hierarkkisesti alkeishiukkasista, kaasuihin, nesteisiin, kiinteisiin aineisiin sekä niiden muodostamiin organismeihin ja näiden populaatioihin. Kehitysjärjestys on voinut tuottaa sellaisia piirteitä, joita ei voida ennustaa alempien tasojen ominaisuuksien pohjalta.

Popperin maailma 2 on subjektiivisten kokemusten alue, jonka elementtejä ovat mentaaliset tilat tai tietoisuuden tilat tai ehkä behavioraaliset toimintatapumukset (Niiniluoto 1990, 17). Tajunta ja kokemuksellisuus edellyttävät hermojärjestelmää, joka on evoluution kautta kehittynyt maailma 1:stä. Näin ollen myös eläimillä voi olla hermostollisen tajunnallisuuden perusteella kokemuksellista informaatiota ympäristöstään, mutta vain ihminen on saavuttanut itsetietoisuuden tason. Popperin mukaan ihmisaivot ja ihmismieli kehittyivät kielen synnyn aiheuttaman evolutiivisen paineen alaisina. Siten maailma 2 on osaltaan maailma 3:n tuote.

Popperin maailma 3 sisältää sosiaalisen toiminnan tuloksena aineelliset ja abstraktit kulttuurituotteet sekä yhteiskunnalliset muodostelmat, mikä edellyttää maailma 1:n ja 2:n olemassaolon. Tämän maailman olioita ovat esimerkiksi ajatukset, tieteelliset teorit, taideteokset ja sosiaaliset instituutiot, jotka voidaan vielä jakaa ”ruumiillistuneisiin” (embodied) ja ”ei-ruumiillistuneisiin” (unembodied) objekteihin (Niiniluoto 1990, 23). Edellisiin kuuluvat materiaaliset artefaktit kuten kirjat, setelit ja taideteokset, joilla on maailma 1:n fysikaalisia ominaisuuksia. Toisaalta niillä on tilanteesta riippuen myös yhteyksiä maailma 2:n ja 3:n kanssa. Näitä ovat esimerkiksi tekstin sisältö, tulkinta, merkitys, arvo ja käyttötarkoitus, jolloin ne voivat edustaa yksilöllistä ajatusmaailmaa tai maailma 3:n kulttuuriesineistöä. Viimemainituilla on lisäksi sellaisia piirteitä, joita sinne ei ole tietoisesti asetettu. (Niiniluoto 1984, 128). Jotkut abstraktit oliot voidaan reprodusoida ja tallentaa maailman 1 ja 2 esityksinä. Esimerkiksi luku voidaan kirjoittaa paperille tai painaa mieleen mentaalisenä konstruktiona. Sosiaaliset instituutiot kuuluvat ”ei-ruumiillistuneisiin” maailma 3:n olioihin, joiden konstituuttina ei ole fysikaalista objektiota. Niiden toimintaympäristö edellyttää kuitenkin maailma 1:n ja 2:n olemassaoloa.

Yksilön konstruoima käsite kuuluu Popperin maailma 2:een, mutta myös maailma 3:n käsitteet ovat yksilön synnyttämiä ja ylläpitämiä. Joskus puhutaan, että myös ominaisuudet ovat käsitteitä. Esimerkiksi yhteenlaskun vaihdannaisuus on laskutoimituksen ominaisuus, mutta toisaalta se on yleistyksen tulos eli käsite Popperin maailma 2:ssa ja 3:ssa. Oppimisen näkökulmasta voidaan todeta, että matematiikka on kulttuurituote, jota sosiaaliset yhteisöt kehittävät ja pitävät yllä. Oppijan on hyvä tietää, minkä

ympäristön puitteissa hän keskustelee tai perustelee väitteitään, sillä arkimaailman, fysiikan maailman ja aksiomaattis-deduktiivisen maailman ajattelutavat poikkeavat toisistaan oleellisesti (ks. luku 2.2.4).

2.4.2 Oppimiskäsityksiä

Kupari (1999, 34) on listannut oppimisenäkemyksen kehitysvaiheet viimeisen sadan vuoden ajalta seuraavasti: toistava laskutaitojen harjoitus (Thorndike: 1920-1930), mielekäs oppiminen (Brownell: 1930-1950), spiraaliperiaate, johon kuuluu rakenteiden oppiminen (Bruner, Gagne: 1960-1970) ja 1980-luvulta lähtien konstruktivismi (Piaget, Wittrock, von Glasersfeld). Näistä vaiheista kolme ensimmäistä kuuluvat behavioristiseen traditioon ja neljäs kognitiiviseen oppimiskäsitykseen (emt., 33). Kuparin luokitus heijastaa pikemminkin opetustapahtuman historiallisia käännteitä kuin antaa yleiskuvaa kyseisten ajanjaksojen oppimisenäkemyksistä.

Nykyisten oppimiskäsitysten mukaan tiedon siirtämistä ei pidetä mahdollisena, vaan tiedon saavuttaminen on oppijan omakohtaisen aktiivisuuden tulosta (esim. Wittrock 1974). Opetuksen tarkoituksena on auttaa oppijaa rakentamaan, omaksumaan, ymmärtämään ja käyttämään uutta tietoa. Tämä edellyttää oppimisteorian lisäksi myös oppiainekohtaista ontologista ja tietoteoreettista selvitystyötä. Vaikka esimerkiksi matematiikan ja kemian kohteet ovat erilaisia, tiedonhankinta niissä noudattaa samanlaisia toimintaperiaatteita. Lisäksi tietämiseen kuuluu kyky arvioida käsityksen pätevyyttä, pohtia itsenäisesti sen puolesta ja sitä vastaan esitettyjä perusteluja, jotka vaativat tiedon menetelmien hallintaa (Puolimatka 2002, 11-12). Tietoteoreettinen selvitystyö johtaa lopulta tiedollisten säännönmukaisuuksien tutkimiseen, joka on vaivalloista työtä kuten Ollila (1996, 6) toteaa.

Ennen laskinaikaa tarvittiin asioiden hoitamiseen sujuvaa laskutaitoa. Nykytekniikan välineet auttavat laskutehtävissä, mutta laskutaidon paremman hallinnan vuoksi periaatteiden ymmärtämiseen opetuksessa on pyritty kiinnittämään enemmän huomiota. Konstruktivismi pyrkii vastaamaan tietoyhteiskunnan haasteisiin kuten tiedon hankintaan, sen käsittelyyn, ymmärtämiseen ja soveltamiseen. Konstruktivismi ei kuitenkaan ole yhtenäinen koulukunta, vaan sen kätteessä on monia yhteismitattomia suuntauksia (ks. Tynjälä 1999; Miettinen 2000; Leinonen 2007). Esimerkiksi oppijakeskeinen malli, tutkivan oppimisen malli ja ongelmakeskeinen malli kuuluvat konstruktivistiseen ajatusmaailmaan (Puolimatka 2002, 14).

Nykyisin oppimiskäsitykset jaetaan kolmeen luokkaan: tiedonhankintanäkemys, osallisuusnäkemys ja tiedonrakentelu. Luokitus perustuu siihen, kuinka tieto, sen lähteet, muodostus ja tiedon tehtävät ymmärretään. Sfard (1998; 2002) puhuu tiedonhankintametaforasta (acquisition metaphora) ja osallisuusmetaforasta (participation metaphora). Edellisen mukaan tieto on objekti, joka voidaan hankkia opiskelemalla. Tietämisellä tarkoitetaan tilaa, jossa yksilön hallussa on käsitteitä, skeemoja ja strategioita. Sfardin (emt.) mukaan tiedon hallintaan kuuluu vielä laatuluokitus tietoteoreettisin perustein. Jos väitteen perustelut hallitaan, on kysymyksessä ymmärretty tieto. Tieto ilman ymmärtämistä (knowledge without understanding) on informaatiota, jonka oppiminen perustuu mm. toistamiseen ja ulkolukuun kuten kertotaulujen

opettelu. Ymmärtävässä oppimisessa korostetaan oppijan omaehtoisia mielen sisäisiä prosesseja, jotka tuottavat strukturoitua sisäistettyä tietoa kestonmuistiin.

Ausubel (1968) on jättänyt oppimisteorioihin ohittamattoman teesin, jonka mukaan kaikki oppiminen perustuu jo aiemmin hankittuun tietoon. Mielekäs oppiminen nähdään tuottavana (generative) tapahtumana, missä luovien prosessien (discovery) kehittämät ideat integroidaan oppijan tietojärjestelmään (Witrock 1974, 182). Sfard (2002, 9) piti mielekkään oppimisenäkemyksen pahimpana ongelmana oppimistulosten arviointikriteerien puutetta. Hänen mukaansa ymmärtäminen on yksilön sisäinen kokemus, joka on ulkopuolisen arvioinnin ulottumattomissa.

Sfradin mukaan osallistumismetaforassa oppiminen ei suuntaudu edellisen tapaan yksilön ”pään sisälle”, vaan se tapahtuu sosiokulttuurisissa ympäristöissä (Greeno ym. 1998). Sosiokulttuurisen perinteen mukaan ajattelu on yhteisöllinen ilmiö, missä kielellä on keskeinen asema kulttuuria ylläpitävänä, tuottavana ja välittävänä tekijänä (Vygotsky 1982). Oppiminen on diskurssiin liittymistä, toimintayhteisöön kasvamista tai aktiviteettien uudelleen järjestymistä (Sfard 2002, 7). Parhaat edellytykset oppimiselle on Vygotskin lähikehitysvyöhykkeessä, kun oppija saa ohjaajaltaan tukea ja siirtyä diskurssin reunalta keskustaa kohti. Yhteisön jäsenyyden saavuttaminen merkitsee tilannekohtaisten toimintasääntöjen omaksumista, mikä näkyy esimerkiksi korrektilä kielenkäyttönä (ks. Ahonen 1998; Aaltola, 1989)). Tiedonhankintametaforassa tieto nähdään yleistettynä ja kontekstista riippumattomana mielen ominaisuutena, kun taas osallisuusmetaforassa yksilö hallitsee yhteisölliset normit ja tilannekohtaiset toimintatavat.

Tiedonhankintametaforan heikkoutena voidaan pitää sitä, että yleistetyn tiedon situationaalinen luonne ja käyttöyhteydet jäävät kovin vähälle huomiolle. Yhteisöön kasvamisessa taas mentaaliset prosessit ohitetaan (Sfard 1998). Näiden puutteiden korjaamiseksi on kehitetty ”kolmas tie”, missä tiedon hankkimisen ja osallisuuden lisäksi otetaan huomioon tietoteoreettiset seikat kuten tiedon luonne, alkuperä ja tehtävät (esim. Bereiter 2002; Hakkarainen ym. 2004; Paavola ym. 2004). Tämän näkemyksen mukaan yhteisö ei vain säilytä ja välitä kulttuurisia perinteitä sukupolvelta toiselle, vaan luovilla prosesseilla tuottaa uutta tietoa ja muuttaa sosiaalisia käytäntöjä. Tiedon rakentelu perustuu kolmikantaan, missä yksilön ja yhteisön vuorovaikutusta välittävät käsitteelliset artefaktit (Niiniluoto 1990, 20). Tietotuotteita ovat esimerkiksi käsitteet, teoriat, mallit ja kieli. Bereiter (2002) huomauttaa, että käsitteelliset artefaktit ovat pikemminkin yhteisön tuottamia ja jakamia kuin yksilön subjektiivisia ajatuksia. Popperin ontologinen kolmijako täydentää rakentelukuvaa, kun fysikaaliset oliot sijoitetaan maailma 1:en, mentaaliset ilmiöt ovat maailma 2:n olioita ja kulttuuriuomukset kuluvat maailma 3:een (Niiniluoto 1990).

Matematiikanopetuksen kannalta tiedonrakentelun metaforaa selkeyttää entisestään Tallin (2004) matemaattisten maailmojen luokittelu: käsitteellis-empiirinen, symbolis-proseptuaalinen ja formaalis-aksiomaattinen maailma. Luokat voidaan nähdä erillisinä, mutta niiden limittyminen tekee yksilöllisen käsitteenmuutoksen joustavaksi (Hähkiöniemi 2006; ks. 2.2.4). Tall ja Vinner (1982) tekivät vielä eron mentaalisten ja julkisten käsitteiden välille, jotka vastaavat Popperin maailma 2:a ja 3:a.

2.4.3 Syvä- ja pintasuuntautunut opiskelu

Tutkiessaan oppimista Säljö (1979) ja Marton ym. (1980; 1993) erottivat toisistaan kaksi erilaista tekstin prosessointitapaa, joista he käyttivät nimityksiä pintasuuntautunut ja syväsuuntautunut opiskelustrategia. Edellisessä opiskelija pyrkii keräämään materiaalista erillisten väitteiden joukkoja ja muistamaan tekstin yksityiskohtaisesti myöhempää käyttöä varten. Tavoitteena on esimerkiksi tentistä selviytyminen, kurssin suorittaminen tai tiedon soveltaminen. Pintasuuntautuneita tasoja on kaikkiaan kolme kuten syväsuuntautuneitakin, ja Marton ym. (1993, 288) käyttävät termiä 'merkitys' siitä tavasta (the way of seeing) tai näkökulmasta asiaan, joka erottaa nämä tasot toisistaan.

Syväsuuntautuneissa strategioissa irralliset väitteet eivät dominoi oppimista, vaan oppimateriaali pyritään jäsentämään ja hahmottamaan kokonaisvaltaisesti. Heidän luokituksessaan alkeistaso on tekstin tarkastelua yhdestä näkökulmasta. Astetta rikkaamman tulkintavalikoiman antaa seuraava taso, jossa opiskelija tarkastelee oppimateriaalia eri näkökulmista. Tällöin tekstistä etsitään yhteyksiä, arvioidaan sisältöä ja suhtaudutaan tekstiin kriittisesti. Tiedonkäsittelyn ja tulkintojen tulos integroidaan aiemmin opittuun tietojärjestelmään. Martonin ym. (emt. 292) strategiahierarkkian ylimmällä tasolla on opiskelijan ajattelutapojen muuttuminen ja yksilön henkinen kasvu, kun hän tulkitsee ja työstää oppimateriaalia. Syväsuuntautuneesta ja holistisesta opiskelustrategiasta voidaan käyttää myös nimitystä ymmärtävä oppiminen (Entwistle 1988).

Tässä luvussa tarkasteltiin niitä avaintekijöitä, jotka pohjustavat matemaattisen ajattelun ja ymmärtämisen analyysiä. Tiedolla on keskeinen asema ihmisen älyllisissä toiminnoissa, ja sitä on saatavilla eri lähteistä runsain määrin. Tiedon käytössä ihmisten hyvinvoinnin lisäämiseksi on paljon toivomisen varaa. Se nähdään esimerkiksi homeetalo- tai terveysongelmissa. Niinpä tiedon hankinta ja sen ”asianmukaisen” käytön oppiminen tarjoavat vakavan haasteen koulutukselle. Vaikka tunteilla, hiljaisella tiedolla tai intuitiolla on tärkeitä tehtäviä oppimisessa, tässä työssä rajoitutaan etupäässä käsitteellisen tiedon, ajattelun ja ymmärtämisen problematiikkaan.

3 Matemaattinen ajattelu ja ymmärtäminen

Vuoden 1965 fysiikan nobelisti Richard Feynman ihmetteli oppimistapahtumaa seuraavasti:

En tiedä, mikä ihmisiä vaivaa. He eivät opi ymmärtämällä. He oppivat jollakin muulla tavalla, ulkoa tai jotenkin? (Brunila 1997)

Ajattelua, ymmärtämistä ja oppimista ei voi erottaa toisistaan, sillä ymmärtäminen syntyy ajattelun tuloksena. Toisaalta ajattelu ei voi toimia autonomisena ilman viitekehystä, teoreettista taustaa ja käsitteellistä välineistöä, jonka asioiden aiempi ymmärtäminen tarjoaa. Oppiminen toimii tässä dialektisessa prosessissa välittävänä tekijänä.

3.1 Matemaattinen ajattelu

3.1.1 Ajattelun luonteesta

Ajattelu ei ole älyllisten toimintojen erillinen elementti, vaan se on olennainen osa niin tiedollisissa ja taidollisissa aktiviteeteissa kuin niiden oppimisessakin. Kun lapsi opettelee esimerkiksi lukemaan, jo yksinkertaisen tekstin ymmärtäminen sisältää hänelle ongelmanratkaisua: lapsi ei voi ymmärtää lukemaansa tekemättä päätelmiä ja käyttämättä hyväkseen tietoa, joka pitkälle ylittää sen, mikä sisältyy itse tekstiin (Resnick 1987). Tekstillä on merkitys vasta osana laajempaa kulttuuriin kuuluvaa viitekehystä. Kalliokoski (1992) toteaa lyhyesti: ei ole tekstiä ilman kontekstia. Mitä pidemmälle luku- tai laskutaidoissa halutaan päästä, sitä tärkeämmäksi tulevat taustatietojen laajuus ja reflektiivisen ajattelun taidot (von Wright 1996).

Ajattelua voidaan pitää prosessina, jossa ideoita yhdistetään toisiinsa ja päätellään jotakin (Mehtäläinen 1992, 18). Ajatteluprosesseja ovat esimerkiksi luokittelu, päättely, argumentaatio, päätöksenteko ja ongelmanratkaisu. Kiinnostava informaatio virittää prosessin, joka tunnistaa tilanteen edellyttämän hahmon. Hahmotuksessa valikoidaan ja yhdistetään ajattelun perustana olevia tietosisältöjä (Laarni ym. 2001, 109). Olennaisten ja epäolennaisten seikkojen tunnistaminen, valinta ja jäsentäminen ovat edellytyksenä sellaisen ongelma-, päättely- tai päätöksentekoavaruuden muodostamiselle, jonka pohjalta voidaan päästä eteenpäin.

Väitöskirjassaan Joutsenlahti (2005, 51) tarkastelee matemaattista ajattelua eri näkökulmista: uskomukset, kulttuuri, matemaattiset kyvyt, informaation prosessointi ja ongelmanratkaisu. Laajan kirjallisuuskatsauksen pohjaltakaan hän ei löytänyt yhte-

näistä kuvausta tai määritelmää matemaattiselle ajattelulle. Ajattelun keskeisimpiä prosesseja ovat Mason ym. (1984) mukaan erikoistapaukseen siirtyminen (*specializing*), otaksumien esittäminen (*conjecturing*), yleistäminen (*generalizing*) ja vakuuttaminen (*convincing*). Ajattelua voidaan lähestyä myös strategioista käsin, joita ovat esimerkiksi lukujonotaidot, analogian muodostaminen, yksittäistapauksen käyttäminen, deduktiivinen päättely ja taaksepäin päättely.

Lauseiden valmiit todistukset, ongelmien ratkaisut tai tieteelliset artikkelit edustavat pikemminkin normatiivisia päättelyihanteita kuin matemaattisen ajattelun suoritusprosessia. Resnick (1987, 7) kirjoittaa: matemaattinen ajattelu on itsenäistä ja kompleksista toimintaa. Siinä on siedettävä epävarmuutta ja ristiriitaisuuksia. Ratkaisuvaihtoehtojen etsimisessä tarvitaan määrätietoisuutta ja luovuutta informaalin ja formaalin tiedon viidakossa.

Usein ajatellaan, että matematiikka on loogista ja tiukkoihin sääntöihin perustuva päättelyä. Ajatteluun liittyvän päättelyn kannalta on kuitenkin hyvä tehdä ero normatiivisen eli loogisen päättelyn ja naturalistisen päättelyn välillä. Jälkimmäiseen kuuluvat myös arkipäivän tilanteet, joihin liittyy monenlaisia vääristymiä kuten edustavuusheuristiikka tai vahvistusilluusio (esim. Marzano 2001, 42; Hakkarainen ym. 2004, 35-40). Matemaattinen päättely on normatiivisen ja tietoisin ajattelun lisäksi myös intuitiivista (Skemp 1988; Merenluoto 2001; Viholainen 2008; Raami 2015). Varsinainen argumentaatio voidaan kuvata lyhyesti kolmivaiheisena: heuristisen idean keksiminen tehtävän ratkaisulle, ratkaisun looginen perustelu ja edellisten kytkeminen toisiinsa (Viholainen 2008, 17). Viholainen kutsuu viimeistä vaihetta avainideaksi, jonka perusteella todistaminen suoritetaan ja ymmärretään, miksi väite on tosi. Näistä vaiheista vain keskimmaiseen kuuluu tiukka looginen päättely, joka esitetään symbolisen manipuloinnin avulla. Kaksi muuta vaihetta sisältävät formaalien elementtien lisäksi informaalia taustatietoa ja intuitiivista päättelyä.

3.1.2 Intuitio matemaattisessa ajattelussa

Ericssonin (2003, 38) mukaan intuitio on ei-tietoinen aktiviteetti, jolla ei ole verbaalista esitystä. Fischbein (1994) tarkastelee intuitiota yhtenä matemaattisen ajattelun kolmesta komponentista, joista kaksi muuta ovat formaali ja algoritmien komponentti. Intuition luonnetta ja tehtäviä ajattelussa on tutkinut tarkemmin Asta Raami (2015) väitöskirjassaan *Intuition Unleashed*.

Termi 'intuitio' on monimerkityksinen. Se viittaa esimerkiksi tietoon, kognitiivisiin prosesseihin tai prosessien tuotoksiin. Intuitio on ajattelun keskeinen tekijä arkitoinnoissa, ongelmanratkaisuisissa ja asiantuntijatehtävissä kuten myös tieteellisessä päättelyssä ja taiteessa. Ajattelussa intuitio on osittain tai kokonaan tiedostamattomana elementtinä tietoisin toiminnan rinnalla, josta se voi pulpahtaa selkeään tietoisuuteen ja hävitä taas tiedostamattoman alueelle (Rauhala 1997, 65). Asiantuntijan intuitiot perustuvat syvällisiin pohjatietoihin, joiden varassa luodaan uutta tietoa, oivalletaan uusia yhteyksiä tai jopa luodaan kokonaan uusia maailmankatsomuksia. Joskus kuitenkin pohjatiedot, näkökulmat tai valmiit viitekehykset kahlitsevat liikaa luovaa toimintaa (Raami 2015, 54).

Kirjallisuuteen viitaten Raami (2015, 53) luokittelee intuitioprosessit tiedonmuodostuksessa seuraavasti: assosiatiivinen (associative), sovittava (matching), keräävä (accumulative) ja konstruktiiivinen (constructive) intuitio. Ensin mainitussa tapauksessa implisiittisesti tehdyt havainnot aktivoivat automaattisesti informaation keräämistä ja soveltamista sen perusteella, että ne ovat aiemmin osoittautuneet käyttökelpoisiksi. Sovittavassa intuitiossa oppiminen ja mieleen palauttamisprosessit ovat jäsenytyneempiä kuin edellisessä tapauksessa. Siinä uutta informaatiota tarkastellaan esimerkkitaustan valossa, ja havaintojen tekeminen perustuu monimutkaisiin viitekehyksiin. Molemmista tapauksista aktiviteettien edellytyksenä on korkea motivaatio, joka pitää yllä aineiston automaattista integroitumista aiemmin opittuihin tietojärjestelmiin. Keräävässä ja konstruktiiivisessa intuitiossa painopiste siirtyy tiedon lisäämisestä uuden tiedon integroitumisen ehtoihin. Tiedon keräämisessä uuden informaation hyväksymisehdolla on tietyt kriteerit. Ehtojen täyttymistä arvioidaan huolella, ennen kuin informaatio hyväksytään osaksi aiempaa tietojärjestelmää.

Edellä mainitut intuitiotyypit työstävät informaatiota osittain tiedostamattomasti. Tällaisia työskentelytapoja ovat aiemmin opittujen mallien tunnistaminen, muistin jäljittäminen ja havaintojen tekeminen. Vasta lopputulos oivalletaan selvästi. (Raami 2015, 53).

Monet tutkijat kuten Skemp (1987), Sierpinski (1994), Tall (1991) ja Harel (2009) ovat tutkineet ymmärtämistä ajattelun resurssina, päättelynä ja sen tuloksena. Skemp (1987, 172) kuvaa älyllistä toimintaa mallilla, jossa on rakenteellinen ja operationaalinen ulottuvuus: ymmärtäminen (understanding) ja päättely (reasoning). Ymmärtämisellä hän tarkoittaa valmiuksia tai kykyjä, joita on kolme lajia: instrumentaalinen, relationaalinen ja looginen ymmärtäminen. Kielellisen ja tietoteoreettisen sekaannuksen välttämiseksi hän ei halua käyttää ilmausta formaali ymmärtäminen, vaan puhuu loogisesta ymmärtämisestä. Matemaattisessa päättelyssä intuitiivinen ja reflektiivinen ulottuvuus liittyvät ymmärtämisen lajeihin niin, että mallissa on kuusi luokkaa (Taulukko 1).

Taulukko 1. Matemaattisen ajattelun luokitus (Skemp 1987, 172).

		Ymmärtämisen lajit		
		Instrumentaalinen	Relationaalinen	Looginen
Päättelyn muodot	Intuitiivinen	I_1	R_1	L_1
	Reflektiivinen	I_2	R_2	L_2

Instrumentaalisella ymmärtämisellä Skemp (emt.) tarkoittaa symbolien manipulointikykyä ja niiden tilannekohtaista käyttämistä ilman, että yksilö tietää, mihin hänen muistissaan olevat säännöt perustuvat (rules without reason). Kahdessa muussa tapauksessa ymmärtäminen koskee matemaattisten ideoiden sisältöjä, joita symbolit ilmaisevat. Ymmärtämisen relationaalisessa luokassa säännöt ovat oppijan hallinnassa, joista hän voi johtaa tilannekohtaisia tapauksia. Loogiseen ymmärtämiseen kuuluu formaalin logiikan käyttäminen väitteiden perusteluissa.

Intuitiivinen päättely tuottaa tilannekohtaisia heuristisia päätelmiä, joiden pätevydestä ei yksilöllä ole välttämättä esittää perusteluja. Reflektiivinen ajattelu etenee tietoisesti yksilön oman käsitejärjestelmän ehdoilla. Reflektiivisessä ajattelussa voidaan kombinoida muistissa olevia rutiinisääntöjä (I_2) ja käsitteellisiä säännönmukaisuuksia (R_2) tai tuottaa väitteen perustelut aksiomaattis-deduktiivisen systeemin mukaisesti (L_2). Kahdelle viimeksi mainituille tapauksille on tunnusomaista perustellut ajatukset eli vastaaminen kysymykseen ”Miksi?” (emt. 111).

Fischbein (1994) pitää formaalin ja intuitiivisen aspektin kytkentää päättelyssä, ymmärtämisessä ja ratkaisuprosesseissa monimutkaisena ja toistaiseksi heikosti tunnettuna. Koska intuitio on osa matemaattista ajattelua (ks. esim. Merenluoto 2001; Viholainen 2008), se on epäselvyydestään huolimatta otettava huomioon matematiikan opetuksessa. Fischbeinin jälkeen mm. Ericsson (2003) ja Raami (2015) ovat asiaa selvittäneet, mutta paljon olisi vielä tutkittavana.

3.2 Ymmärtäminen ja mielekäs oppiminen

Amerikkalainen kasvatuspsykologi William A. Brownell (1895-1977) mainitaan usein mielekkään oppimiskäsityksen pioneerina (ks. esim. Kilpatrick & Weaver 1977; Kieran 1994). Hänen mukaansa jo matematiikan alkeisopinnoissa on kiinnostava huomio siihen, että oppilaat ymmärtäisivät aritmetiikan laskutoimitukset mielekkäinä operaatioina mekaanisen muistamisen sijasta (Brownell 1935). Kasvatuspsykologian tunnetuimpiin teorioihin kuuluu mielekkään oppimisen teoria, jonka Ausubel (1968) rakensi Brownellin inspiroimana (Ausubel & Robinson 1973). Sanalla ’mielekkyys’ on tässä kaksi ulottuvuutta, joista toinen liittyy affektioihin ja toinen kognitioon. Ei riitä, että oppilaalla on halu oppia, vaan oppimateriaalilta edellytetään yhteensopivuutta oppijan aiemmin omaksumiin tietoihin. Integroitumisessa eli assimilaatiossa uusi idea ei liity mielivaltaisesti ja määrämuotoisesti oppijan aiempaan tietojärjestelmään, vaan uusi sanoma integroituu luontevasti sekä sisällön että muodon puolesta aiempaan tietosysteemiin. Jos idean liittyminen muistiin ei täytä edellä mainittuja ehtoja, on Ausubelin (emt. 54) mukaan kysymyksessä rutiinioppiminen.

3.2.1 Merkityksen ymmärtäminen

Merkitys voi esiintyä ymmärtämisen vastinparina. Toiset selittävät Deweyn (1998/1910, 137) tapaan ymmärtämisen merkityksellä, jolloin ymmärtäminen on eräänlainen tulkintojen raja-arvo (Vartiainen 2005,142). Hermeneutiikassa prosessi etenee päinvastaisessa järjestyksessä (Kusch 1986). Ymmärtäminen hermeneuttisessa traditiossa johtaa kokonaisvaltaisiin ja mielekkäisiin elämänkokemuksiin (Puolimatka & Airaksinen 1994; Värrö 2004), joiden tarkastelu jää tämän tutkimuksen ulkopuolelle, kun pääpaino on kognitiivisissa prosesseissa. Merkitys on sikäli tärkeä entiteetti, että me ymmärrämme tai emme ymmärrä asioiden tai tekstien merkityksiä.

Merkityksen käsitettä on hankala määritellä ilman, että päädytään kehäpäätelmään. Sanalla ’merkitys’ on suuri määrä merkityksiä, joille on vaikea löytää riittävästi yhteisiä

piirteitä saatikka määritelmää. Sen vuoksi sitä voidaan pitää ”pelin” kaltaisena punos-käsitteenä. Merkitys voi olla henkilökohtainen kokemus, mutta se voi olla myös yhteisöllinen ja kulttuurinen entiteetti, joka ilmaistaan indeksin, ikonin tai symbolin avulla. Koska kieli on opetustilanteissa keskeinen viestinnän väline, tässä työssä tarkastellaan merkitystä enimmäkseen semantiikan ja kielenkäytön näkökulmasta.

Merkitysten suureen määrään viittaa Ogden ja Richardsin (1946) työ, jossa annetaan 16 eri määritelmää sanalle ’merkitys’. Taylor (1970, 112-140) jakoi merkityksen teorian kahteen luokkaan: Fido-fido -teoriat ja kausaaliteoriat. Edellinen viittaa siihen, että sanan merkitys on tietty kohde, jota sana vastaa. Lauseen merkitys on se tilanne, jota lause kuvaa. Kausaaliteoriassa sanat saavat merkityksensä ehdollistamisen tai siihen verrattavan prosessin kuvauksena. Alston (1964, 11) puolestaan ryhmittelee kielelliset merkitykset kolmeen luokkaan: referenssiteoriat, ideaatioteoriat ja käyttäytymisteoriat. Referenssiteorioissa kielellisten ilmausten merkitykset ovat kohteita, joihin viitataan tai mitä nimitään. Ideaatioteorioissa tarkastellaan sanojen ja lauseiden käyttöä ajatusten, ideoiden ja kokemusten ilmaisemisessa. Käyttäytymisteorioissa kielellisen ilmaisun merkitys on se reaktio, jonka puhujan ilmaisu saa kuulijassa aikaan. Viitaten Wittgensteiniin (1981/1953) Aaltola (1989) lisää edellä mainittuihin luokkiin vielä kielen käyttöä koskevat teoriat. Tällöin sanojen ja lauseiden merkitykset palautuvat kielenkäytön julkisyhteisöllisiin sääntöihin, jotka ovat luonteeltaan normatiivisia.

Tässä työssä referentiaalisella ja holistisella merkityksellä on keskeinen asema. Edellisen tapauksessa semanttinen viittausrelaatio kytkee merkin tarkoitteeseensa, kun taas jälkimmäisessä merkin, ajatuksen tai tunteen merkityksellä tarkoitetaan sen asemaa ympäristössään. Tällöin merkitys on luonteeltaan dualistinen, sillä yksittäinen merkki viittaa kohteeseen, mutta kohteen merkitys riippuu valitusta kontekstista. Esimerkiksi symboli $\frac{3}{4}$ voi viitata yksittäiseen rationaalilukuun, summaan $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ tai kolmen esineen jakamista neljälle jne. Vielä on erotettava intention kohde eli asia siihen liitetyistä sisällöstä, jolloin puhutaan ekstensiosta ja intensiosta. Vaikka ekstensio olisi sama, voi intensio muuttua valitun näkökulman mukaan. Esimerkiksi kemistin, geologin ja sijoittajan näkökulmasta voi yksittäisellä kultakappaleella olla hyvinkin eri intensio.

Semantiikka tarkastelee kielellisiä ilmauksia kulttuuristen merkitysten kantajina, eikä kielenkäytön mentaaliseen rooliin kiinnitetä huomiota. Sanoman ilmaiseminen ja ymmärtäminen edellyttävät kuitenkin aktiivista otetta, jossa sopivan kontekstin ja näkökulman valinta on lähtökohtana referentiaalisten merkitysten tavoittamisessa. Sana ’tarkoittaa’ on sanan ’ymmärtää’ käänteistapahtuma. Kun puhuja tai kirjoittaja käyttää kielellistä ilmaisua ajatuksensa ”merkittämiseen”, on ajatus ilmaisun merkitys. Tarkoittaessaan jotakin kohdetta subjekti suuntaa ajatuksensa tiettyyn erityiseen objektiin, johon hän liittyy sopivan ilmaisun. Kuulijan tai lukijan tehtävä on tavoittaa puhujan tarkoittama ajatus eli ymmärtää kyseisen ilmaisun merkitys taustatietojensa varassa. Kommunikoinnissa valinta-avaruus on esittäjän ja vastaanottajan kannalta laaja ja monisäikeinen, eikä väärinkäsityksiä ole aina helppo välttää (Aaltola 1989, 16-27). Kun kuulija ei tavoita sanoman sisältöä laisinkaan, puhe on hänelle pelkkää sanahelinää. Jos ilmaisulta puuttuu kohde, on kysymyksessä nonreferentiaalinen ajattelu, josta Harel (2009) antaa useita esimerkkejä logaritmien supistamistehtävissä. Pedagoginen

ongelma on, mitä sanoja käytetään, kun ilmaisua halutaan tarkentaa sisällön tai kohteen osalta.

Motivaation näkökulmasta merkitys liittyy erilaisiin henkilökohtaisiin arvoihin kuten kognitiiviset, esteettiset, praktiset, sosiaaliset tai ammatilliset arvot (Ollila 1996). Jos oppilas näkee, että matematiikalla ei ole merkitystä hänen tulevaisuudensuunnitelmissaan tai arvomaailmassaan, voi kiinnostus matematiikkaan jäädä vähäiseksi. Hän ei siis ymmärrä, miksi hänen täytyy opiskella matematiikkaa (Kilpatrick ym. 2001, 118). Tässä työssä tutkimuksen kohteena on mielekäs oppiminen ja ymmärtämisen edistäminen matematiikassa, jossa oppimiseen vaikuttavat affektiiviset ovat vain kätkeytyneinä mukana.

3.2.2 Ausubelin oppimismalli

Ausubelin (ks. Novak 1997, 11) mukaan käsitteenmuodostus on jatkumo, jossa on kaksi ääripäätä. Toisessa yksilö ottaa vastaan (reception) käsitteen, ja toisessa keksii sen itse (discovery). Edellisellä tarkoitetaan sitä, ettei oppilas itsenäisesti keksi oppimateriaaliin sisältyvää ajatusta. Opettaja voi esimerkiksi näyttää muutaman kolmion ja todeta, että kolmion kulmien summa on 180 astetta. Oppilaan päätettäväksi jää väitteen hyväksyminen tai hylkääminen määrämuotoisena. Tilanne on toinen, kun oppilas itse oivaltaa symbolisen esityksen merkityksen tai kuvallisen esityksen säännönmukaisuuden (yleistys tai periaate). Esimerkiksi kolmioita tutkiessaan opiskelija itse huomaa, että kulmien summa näyttää olevan kolmion muodosta riippumatta 180 astetta. Ausubelin teoriassa käsitteen muodostus ja muistiin taltiointi ovat toisistaan riippumattomina ulottuvuuksina nelikentässä. Oppimisen kuvaus nelikentässä tapahtuu siten, että yksilö voi painaa mieleensä esimerkiksi keksimänsä periaatteen erillisenä tai integroida sen aiemmin luomaansa tietojärjestelmään.

Termit 'receptive learning' ja 'discovery learning' saavat tavallisesti suomenkieliset ilmaisut 'vastaanottava oppiminen' ja 'keksivä oppiminen'. Nämä käännökset eivät ole onnistuneita, jos oppimisella tarkoitetaan von Wrightin (1996, 352) tavoin ei-hetkelistä muutosta tiedoissa, taidoissa, käsityksissä tai tunteissa. Käsitteen oivaltaminen ei vielä merkitse, että se taltioituisi muistiin, joka on oppimisen edellytys. Mieleen painaminen on Ausubelin teoriassa erillinen oppimisen vaihe. Vaikuttaa siltä, että tässä yhteydessä englanninkielessä sanalla 'learning' on kaksi eri merkitystä: käsitteen oivaltaminen ja taltiointi (ks. myös Kansanen 2004, 54).

Wittrock (1974) kehitti Ausubelin teoriaa ja korosti ymmärtämisen kaksiulotteista merkitystä oppimisessa. Hänen mukaansa (emt., 182) ymmärtävään oppimiseen kuuluvat rakenteiden luominen informaation taltiointia varten ja informaation kytkeminen jo hallussa oleviin rakenteisiin.

Mielekkäässä oppimisessa tiedon passiivinen vastaanottaminen ei ole mahdollista, vaan oppiminen edellyttää aina jonkinasteista aktiivisuutta. Tämä johtuu käsitteen kontekstisidonnaisuudesta, jonka vuoksi käsitettä ei voida siirtää ympäristöstään irrotettuna. Näin ollen ymmärtävä oppiminen (learning with understanding) vaatii luovaa toimintaa ainakin kolmessa merkityksessä: kontekstin valinta, annetun tekstin sisällön oivaltaminen ja sisällön integroiminen aiemmin tehtyyn systeemiin. Wittrock (emt.)

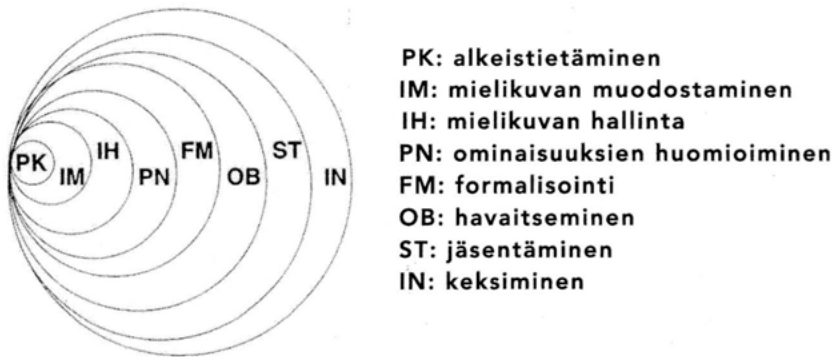
tähdentää erityisesti tekstin tulkinnan luovaa luonnetta ja sen sisällön mielekästä haltuun ottamista (to grasp the meaning) eli ymmärtämistä. Yksittäisten symbolien merkitys syntyy siten, että symbolin ja sen referentin väliin luodaan linkki (Wearne & Hiebert 1988, 272-273). Jos linkitystä halutaan kuvata kielen kuvateorialla, symboleista rakennetun lauseen struktuuri vastaa kuvattavan kohteen rakennetta edellyttäen, että lause on tosi (Wittgenstein 1971/1922). Psykologian näkökulmasta kysymys on mentaalisesstä prosessista, missä kuva on yksilön projisoima esitys lauseelta sen referentille (Ahonen 1998).

3.2.3 Matematiikan ymmärtämisen tutkimus

Ymmärtäminen on pitkän aikaa ollut keskeinen aihe matematiikan oppimisen tutkimuksessa. Brownellia ovat seuranneet muun muassa Bloom (1956), Ausubel (1968), Wittrock (1974), Skemp (1976), Hiebert ja Lefevre (1986), Sierpinska (1994) ja Kilpatrick (2009). Se näkyy myös runsaana artikkelien määränä ja väitöskirjoina. Esimerkiksi Glen Helmstad (1999) kirjoitti väitöskirjansa nimellä *Understanding of understanding* kuten myös Judith Mousley (2003) omansa nimellä *Mathematical understanding as situated cognition* tai Antti Viholaisen (2008) kirja *Prospective mathematics teacher's informal and formal reasoning about the concepts of derivative and differentiability*. Pari vuotta sitten ilmestyi Rauno Koskisen (2016) väitöskirja *Mielekäs oppiminen matematiikan opetuksen lähtökohtana*. Viimeisin väittelijä on Hanna Viitala (2018) kirjallaan *Studying pupils' mathematical thinking through problem solving and view of mathematics: Case studies of Finnish comprehensive school pupils*. Suomalaisista tutkijoista mainittakoon vielä Huhtala (2000), Hassinen (2006), Joutsenlahti (2005), Hähkiöniemi (2006), Näveri (2009) ja Partanen (2011). Heidän tutkimuksensa vähintäänkin sivuavat ymmärtämistä. Ymmärtäminen on myös ollut kotimaisten ja kansainvälisten seminaarien teemana kuten Turun seminaari vuonna 2002: *Workshop on Mathematical Understanding* ja Prahan Semt-symposium vuonna 2009: *The development of Mathematical Understanding*.

Tutkijat ovat tehneet ymmärtämistutkimusten luokituksia eri perusteilla, mutta Sierpinskan (1994, 119-120) luokitus sopii tämän työn ajatusmaailmaan parhaiten. Hän on jakanut löytämänsä mallit ja teorit neljään luokkaan a) hierarkkiset tasomallit, b) kognitiiviset struktuurit, c) dialektiset mallit ja d) historiallis-empiirinen käsiteanalyysi. Kun viimeinen luokka korvataan Sierpinskan (emt., 56; 75) dynaamisella prosessikuvauksella, saadaan kaivattuja lisäelementtejä uuden oppimismallin kehittämiseen tähän työhön:

a) Ymmärtämisen hierarkkiset tasomallit: Pirie ja Kieren (1994) ovat esittäneet kahdeksanosaisen vaihemallin, missä kognitiivinen struktuuri kehittyy proseduurin, abstraktion ja yleistämisen kautta (Kuvio 1).



Kuvio 1. Matemaattisen ymmärtämisprosessin vaiheet (Pirie & Kieren 1994).

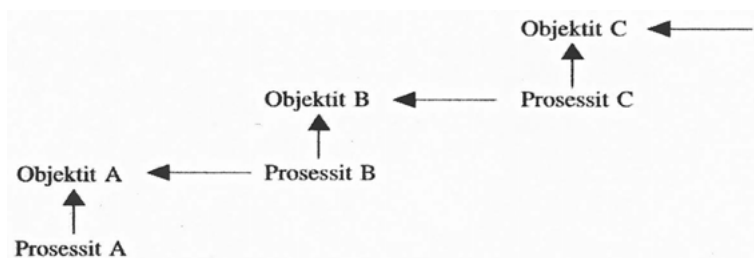
Alkeistietämisen vaihetta lukuun ottamatta kukin vaihe kulkee proseduurien kautta käsitteiksi ja tietorakenteiksi. Ne kehittyvät konkreetista abstraktiin sekä yksinkertaisista rakenteista monimutkaisiin ja yleisiin. Koska prosessiin kuuluu vaiheiden hallinta sisäkehältä lähtien, on tilanteen vaatiessa palattava työstämään ja täydentämään edeltävien vaiheiden puutteita (folding back). Konkreettisista malleista luopuminen ja formaalille tasolle siirtyminen on radikaali muutos yksilön ajatusmaailmassa.

b) Kognitiiviset struktuurit ja käsittemallit: Hiebert ja Carpenter (1992, 67) tarkastelevat mielekästä oppimista ymmärtämisen näkökulmasta. Ymmärtäminen palautuu tietorakenteisiin ja niiden esitysmuotoihin eli representaatioihin. Heidän mukaansa ymmärtäminen liittyy tiettyyn yksilöön, tarkasteltavaan matemaattiseen sisältöön ja erityiseen ympäristöön: ”Henkilö on ymmärtänyt matematiikan idean, menetelmän tai tosiasian, jos se on osa hänen sisäistä tietoverkkoaan”. Ymmärtämisen aste riippuu tietoverkon yhteyksien lukumäärästä ja voimakkuudesta. Edelleen he toteavat, että jokin matematiikan osa-alue on ymmärretty, jos sen mentaalinen representaatio on osa yksilön tietoverkoston representaatiota. Hiebert ja Carpenter (emt.) pitävät ymmärtämistä oppimistuloksena ja ajattelun resurssitekijänä, mutta eivät sen lisäksi aktiivisena toimintana kuten esimerkiksi Sierpinska (1994) tekee.

c) Dialektiset mallit, joissa operationaalinen ja strukturaalinen ajattelu vuorottelevat. Harel (2009) tarkasteli oppimista dialektisena prosessina, jossa ymmärtäminen ja päättely toimivat komplementaarisena parina. Hänen DNR-mallinsa periaatteita ovat dualisuus (Duality principle), mielenkiinto (Necessity principle) ja toistuva päättely (repeated Reasoning). Ensimmäinen periaate viittaa siihen, että oppimisprosessissa ymmärtäminen ja päättely täydentävät toisiaan. Laadukkaan oppimisen välttämättömänä ehtona Harel pitää oppilaan älyllistä mielenkiintoa matematiikkaa kohtaan. Toistuva harjoittelu tähtää asioiden sisäistämiseen, järjestämiseen ja rakenteiden muistamiseen

sekä joustavaan tietojen hallintaan. Keskeisinä ajattelun toimintoina Harel pitää ongelmanratkaisua, tulkintaa ja lauseen todistamista.

Anna Sfardin (1991) mallissa matemaattisen ymmärryksen kehittyminen on kuvattu dialektisena prosessina, joka perustuu tiedon dualistiseen luonteeseen. Oppiminen noudattaa geneettistä kaaviota (Haapasalo 2004, 56) siten, että ajattelun operationaalinen ja struktuurallinen vaihe täydentävät peräjälkeen toisiaan. Ajattelu intentionaalisenä toimintana kohdistuu objekteihin ja prosessi kapseloituu uudeksi rakenteeksi, joka on seuraavan ajatteluprosessin objektina (Kuvio 2).



Kuvio 2. Matemaattisen käsitteenmuodostuksen dialektinen malli (Sfard 1991, 221).

Sfardin mallin peruselementissä on kolme osaprosessia: sisäistäminen, tiivistäminen ja reifikaatio. Sisäistämistoiminnot kohdistuvat alkeistapauksissa konkreettisiin objekteihin tai niiden symbolisiin esityksiin. Esimerkiksi jakolaskuja voidaan käsitellä esineiden osituksina, mallien avulla tai kuvitteellisesti. Oppija voi tulkita kolme viidesosan siten, että jokin kappale on jaettu viiteen osaan, josta kolme on otettu erilleen. Tiivistämisvaiheessa jakamisoperaatio rikastuu suoritukseksi, jonka välivaiheisiin ei tarvitse kiinnittää huomiota. Reifikaatiovaiheen tehtävä on abstrahoida operaatiot ja mielikuvat itsenäiseksi rakenteeksi, joka voi olla seuraavan vaiheen ajatuskohteena. Sana reifikaatio on latinankielinen laina, joka palautuu sanoihin *res* ja *facere* eli tosiasiaan palaaminen. Kysymys on siis tapahtumasta, jossa operaatio muuttuu tosiasiaksi ja molemmat voivat näyttäytyä saman asian eri puolina. Esimerkiksi kolme viidesosa voidaan nähdä laskutoimituksen tuloksena, suorituskompleksina tai kahden luvun suhteena, jolloin murtoluku näyttäytyy monimuotoisena.

Viimeksi mainitut mallit (Pirie & Kieren ja Sfard) kuvaavat matemaattisen ymmärtämisen vaiheittaista kehittymistä. Tällöin päättely ja ymmärtäminen sulautuvat matemaattiseksi ajatteluksi. Sitä vastoin Harelin malli edustaa sellaista toimintaa, jossa ymmärtäminen ja päättely täydentävät toisiaan prosessin edetessä.

d) Dynaaminen prosessikuvaus: Sierpinska (1994) jakaa ymmärtämisen kolmeen tapahtumaan: ymmärtämisen akti (act of understanding), ymmärtäminen (an understanding) ja ymmärtämisen prosessi (process of understanding). Akti on intentionaalinen tapahtuma, joka koostuu neljästä tekijästä: subjekti, objekti, perusta (the basis) ja kytkemisoperaatio (act). Olkoonpa objekteina tosiasiat, tekstit tai ongelmat, kysymyksessä on vähintään kahden elementin kytkeminen toisiinsa tai osan liittäminen koko-

naisuuteen eli perustaan. Sierpinskan (emt. 56) mukaan kytkemisoperaatiota edeltää identifikaatio, diskriminaatio, yleistys ja synteesi. Jonkin asian ymmärtäminen (an understanding) on päättelyketjun (reasoning) tulos, missä yksittäiset aktit seuraavat toisiaan. Ymmärtäminen prosessina on pitkän ajanjakson tapahtuma, missä aktit ovat osatekijöinä ja yksilön käsitejärjestelmä muuttuu. Sierpinska (emt., 75) erottaa vielä spontaanit päättelyt ongelmiin suuntautuneesta ajattelusta. Viimeksi mainittuja ovat hänen mukaansa todistaminen, verifiointi ja selittäminen, jolloin prosessin käynnistää usein kysymys ”Miksi?”

Yhteenvedona voidaan todeta, että ymmärtämistutkimus on ollut aktiivista eri puolilla maailmaa. Sierpinskan luokitus tarjoaa tässä yössä aineksia dialektisen oppimismallin kehittämiseen, jossa käsitteellinen taustatieto ja mentaaliset prosessit voivat muodostaa oppimisprosessissa toimivan parin. Seuraavassa luvussa selvitetään, miten opetussuunnitelmia ohjaavat tai myötäilevät mallit voivat antaa aineistoa tälle tutkimukselle.

3.3 Ymmärtäminen opetussuunnitelmissa

Suomalaisissa opetussuunnitelmissa ymmärtäminen ja ajattelutaidot ovat olleet peruskoulun alkamisesta lähtien kaikkien oppiaineiden formaaleja tavoitteita (Komiteanmietintö 1970). Monissa maissa alettiin 1980-luvulla siirtää opetuksen painopistettä ajattelutaitojen kehittämiseen, mikä näkyi muun muassa amerikkalaisissa komiteanmietinnöissä ECS (1982) ja NCE (1983). Suomessa muutosideat ilmenivät kannanottoina, joissa kiinnitettiin huomiota tiedollisiin taitoihin. Kriittisen ajattelun ja päättelyn puolesta kirjoitettiin mm. otsakkeilla: ”Tiedollisen kasvatuksen formaaliset tavoitteet” (Voutilainen 1987), ”Tietämisen taidot” (Venkula 1988) tai ”Koulut ja aktiivinen tiedon käsite” (Niiniluoto 1988). Meillä valtavirta aiheutti muutospaineita opetussuunnitelmien tavoitteenasetteluun, joka näkyi ongelmanratkaisutaitojen tehostamisena (Kupari 1999, 50). Tämän vuosituhanen opetussuunnitelmissa on etsitty tasapainoa matemaattisen ajattelutaidon, ymmärtämisen, ongelmanratkaisutaitojen, soveltamistaitojen ja laskutaitojen kesken (esim. NCTM 2000, Opetushallitus 2004, Opetushallitus 2014 ja OECD 2016).

Ymmärtäminen on ollut toistuvasti esillä eri maiden opetussuunnitelmissa viimeisen sadan vuoden ajan. Tässä yhteydessä esitellään tarkemmin neljä opetussuunnitelmiin liittyvää oppimismallia: Bloomin ja Marzanon taksonomiat, amerikkalainen punosmalli ja Singaporen Pentagon-malli.

Bloomin (1956) tavoitetaksonomia on yksi tunnetuimmista ajattelun hierarkkisista malleista, joka ohjasi vuosikymmeniä opetussuunnitelmien laatimista, oppimistulosten arviointia ja opetuskäytäntöjä. Taksonomia on tarkoitettu pääasiassa oppimistulosten arviointistandardiksi, mutta se alkoi ohjata myös opetuskäytäntöjä, vaikka siihen ei oltu liitetty opetusohjeita tai oppimisteoreettisia perusteita. Oppikirjoissa tämä näkyi siten, että uuden asian opetus aloitettiin faktatiedoilla ja rutiinitaitojen harjoittamisella. Lopussa päädyttiin ongelmanratkaisutehtäviin.

Nykykäsityksen mukaan Bloomin taksonomia (1956) on epätäydellinen ja vaikeaselkoinen edes oppimisen kuvaajaksi. Siitä puuttuu esimerkiksi kaksi keskeistä ajattelun tasoa: minä ja metakognitio (ks. Marzano 2001, 10). Kognitiivisten prosessien ja tiedon sisältöjen yhdistäminen tekee taksonomian käytön vaikeaksi. Bloomin tasojen hierarkkia perustuu kognitiivisten toimintojen monimutkaisuuteen, mikä ei ajattelun taitojen kannalta täytä hierarkkian kriteerejä. Esimerkiksi ylintä tasoa, evaluointitaitoja, tarvitaan jo alemmilla tasoilla tai ymmärtämisen ja soveltamisen suhde voi joissakin tapauksissa olla päinvastainen.

Tässä työssä Bloomin ym. (1971, 141; 150) taksonomian toinen taso (comprehension) on kiinnostavin. Siinä ymmärtämisellä tarkoitetaan tiedon systematisointia ja sisäistämistä (understanding). Tämä taso on polaarinen. Toisen ulottuvuuden muodostavat tietorakenteet kuten käsitteet, säännöt ja struktuurit ja toinen ulottuvuus on esitetty toimintoina, joita ovat esitystavan kääntäminen (translation), tulkinta (interpretation) ja ekstrapolaatio (extrapolation). Päähuomio on tiedon rakenteissa ja toiminnoissa, sekä niiden kielellisissä, kuvallisissa tai symbolissa esityksissä. Taksonomia (emt. 24) on tarkoitettu antamaan oppimistulosten operationaaliset arviointikriteerit. Puutteistaan huolimatta Bloomin tasomalli on edelleen käytössä.

Wilson (1971, 645) teki Bloomin mallista matematiikan opettamiseen oman sovelluksensa, missä ajattelun tasot on tyypistetty neljään (Kuvio 3). Wilsonin tasomallia käytetään edelleen kuten esimerkiksi Näveri (2009) teki. Robert Marzano (2001) kehitti Bloomin taksonomiaa lisäten siihen minän ja metakognition. Tutkija perusteli päivitystä sillä, että uusi tutkimustieto mielen toiminnoista, tiedon luonteesta ja niiden välisestä interaktiosta oli muuttunut dramaattisesti viidessä vuosikymmenessä. Uudistetussa mallissa informaation lähteinä ovat ulkomaailma ja kesto muisti. Informaation käsittely tapahtuu sensorisessa muistissa ja työmuistissa. Työmuistin kapasiteettirajoja voidaan kiertää kesto muistin laajoilla tietoryppäillä ja sujuvilla operaatioilla. Malliin kuuluu kolme prosessijärjestelmää: minä, metakognitio ja kognitio. Minä-systeemi on motivaation kannalta keskeinen, sillä se sisältää emootiot ja siinä arvioidaan tehtävän tärkeys ja käytettävissä olevat resurssit. Metakognitio määrittää tavoitteet sekä ohjaa, valvoo ja arvio prosessien kulkua. Kognitiivisten prosessien nelijako muistuttaa Wilsonin luokitusta. Alinta tasoa edustaa mieleen palautus ja tehtävän suoritus (retrieval). Kolme seuraavaa ovat ymmärtäminen, analyysi ja tiedon soveltaminen. Ymmärtämisen (comprehension) taso on Bloomin vastaavan tason kaltainen, ja se sisältää synteesin ja representaation.



Kuvio 3. Wilsonin sovellus Bloomin tasohierarkiasta (ks. Leino 1977, 18).

Prosessit ovat järjestäytyneet tasoittain hierarkkisesti siten, että minä-systeemi on ylimpänä, jota seuraa metakognitio ja alimpana ovat kognitiiviset prosessit. Marzanon mallin toinen ulottuvuus sisältää kolme resurssiyksikköä: propositionaalinen, proseduraalinen ja psykomotorinen tieto. Kaksiulotteinen malli kuvaa ajattelua ja oppimista siten, että aktiviteetit ovat vuorovaikutuksessa tietojärjestelmien kanssa. Jos esimerkiksi saapuva informaatio läpäisee minä-kontrollin, metakognitio määrittää tavoitteet ja ohjaa prosessin kulkua. Kognitiiviset prosessit työstävät informaatiota käyttäen kesto-
muistin tietojärjestelmiä tehtävän suorittamiseen.

Punosmalli: Kilpatrick ym. (2001) ja Kilpatrick (2009) tarkastelivat matematiikan oppimista aktiivisen tiedonkäsityksen näkökulmasta. Tutkimusryhmä antoi kehittämälleen matematiikan oppimisen mallille nimen 'mathematical proficiency'. Amerikkalaisten punosmallissa osaamisella on viisi säiettä, jotka ovat kietoutuneet toisiinsa tehtävänsä mukaisesti (Kilpatrick 2009, 48)

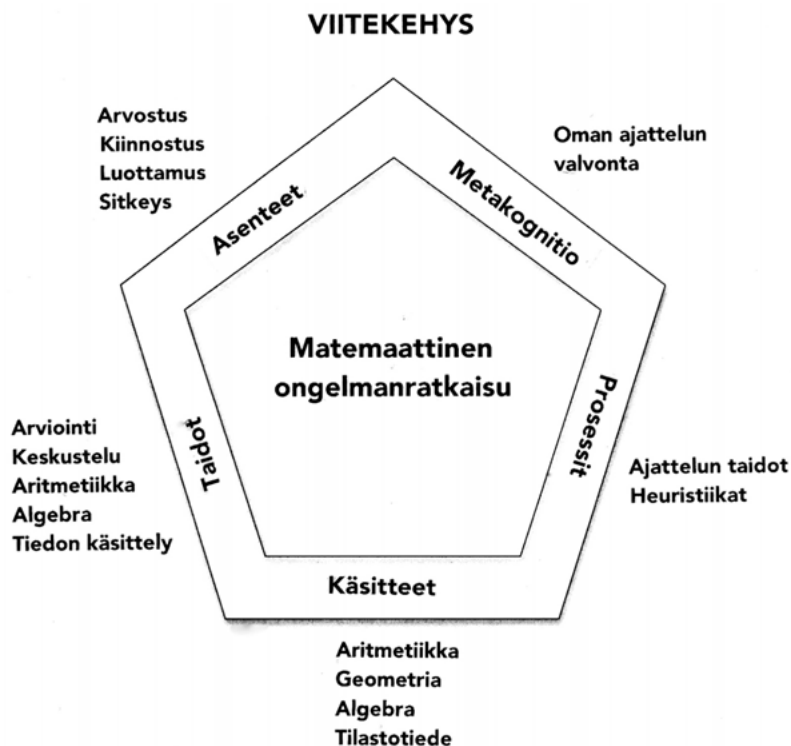
- *konseptuaalinen ymmärtäminen*, johon kuuluu käsitteiden, relaatioiden ja operaatioiden hallinta (comprehension)
- *proseduraalinen sujuvuus*, joka tarkoittaa tehtävissä tarvittavien suoritustaitojen joustavuutta, tarkkuutta, tehokkuutta ja tarkoituksenmukaisuutta
- *strateginen kompetenssi*, joka viittaa kykyyn muotoilla, esittää ja ratkaista ongelmia
- *mukautuva päättely*, johon kuuluu joukko kykyjä, kuten looginen päättely, reflektointi, selittäminen ja oikeutus/perustelu
- *toiminnallinen valmius*, johon liittyy myönteinen asenne matematiikkaan ei vain älyllisenä haasteena vaan myös käyttökelpoisten sovellutustensa vuoksi.

Näennäisesti tästä mallista puuttuu metakognitio, joka sisältyy kuitenkin strategiseen kompetenssiin ja mukautuvaan päättelyyn. Metakognition tehtävä on suunnitella, ohjata ja arvioida kognitiivisia toimintoja kuten oppimista. Kilpatrickin (emt. 50) mukaan yksilön toiminnallista valmiutta on hankala arvioida, mutta ymmärtäminen on vaikeimmin saavutettava osa-alue. Hänen mukaansa opetuksessa ei tulisi pyrkiä etenemään komponentteittain vaan kaikkia viittä osa-aluetta tulisi kehittää tasapuolisesti.

Pentagon-malli: Singaporelainen työryhmä (the Curriculum Development Institute in Singapore) on tehnyt 1990-luvulla Pentagon-mallin nimeä kantavan viitekehyksen sikäläisen opetussuunnitelman pohjaksi (Kuvio 4).

Pentagon-mallin pääjakoön kuuluvat totuttuun tapaan matematiikan sisällöt, prosessit ja affektiot (Leong ym. 2016). Kuvio 4 osoittaa selkeästi, että nämä ulottuvuudet ovat erottamattomassa yhteydessä toisiinsa. Pentagon-mallissa on amerikkalaisen punosmallin tapaan viisi elementtiä kytkeytyneenä toisiinsa. Ne ovat asenne, metakognitio, prosessit, käsitteet ja taidot. Kilpatrickin (2009) mukaan punosmalli on melkein pätkä kopio Singaporen viitekehyksestä. Konseptuaalinen ymmärtäminen vastaa käsitteellistä aspektia ja proseduraalinen joustavuus taitoja. Punosmallissa strateginen kompetenssi kuuluu metakognitioon ja prosesseihin. Mukautuva päättely vastaa Pentagonin prosesseja ja metakognitiota. Punosmallin toiminnallinen komponentti vastaa

singaporelaisten kehyksessä asenteita. Keskeinen asema Singaporen mallissa on ongelmanratkaisulla, joka on amerikkalaisten punosmallissa sisällytetty kaikkiin säikeisiin, valtaosiltaan kuitenkin strategiseen kompetenssiin. Punosmalli ja Pentagonkaavio edustavat viitekehyksiä, joita voidaan tarkastella esimerkiksi Marzanon (2001) mallin puitteissa.



Kuvio 4. Singaporelainen matematiikan opetussuunnitelman viitekehys (ks. Kilpatrick 2009).

Luvuissa kaksi ja kolme kartoitettiin, analysoitiin ja suhteutettiin toisiinsa ymmärtävän oppimisen ja ajattelun keskeisiä käsitteitä. Niitä ovat käsite, merkitys, ajattelu, ymmärtäminen ja oppiminen. Kartoitus merkitsi aiheen kannalta relevanttien tekstien etsimistä ja valitsemista. Etsintä lopetettiin, kun uusia avauksia ei enää ilmaantunut. Analyysin tehtävä oli aineiston käsitteellinen erittely sekä osien suhteuttaminen toisiinsa ja kokonaisuuteen. Kartoituksen ja analyysin tuloksena kehkeytyi ajatusrakennelma, jonka keskeisiä tekijöitä ovat Haapasalon tiedonkäsitys, dialektiset oppimismallit ja Kilpatrickin punosmalli, jossa on esitetty matematiikan oppimisen keskeisten elementtien kytkennät ja tehtävät. Nämä kolme edustavat aktiivista tiedonkäsitystä, jossa ajattelun aktiviteettien ja kesto- ja tietoresurssien vuorovaikutus on mielekkään oppimisen tunnusmerkkinä. Marzanon taksonomia tarjosi kokonaisuutta hahmottavan näkemyksen, josta vain osa on tämän työn fokuksessa.

4 Tutkimuksen tarkoitus ja toteutus

Peruskoulun opetuksen keskeisiin yleistavoitteisiin kaikissa oppiaineissa ovat kuuluneet ajattelutaitojen, ymmärtämisen ja ongelmanratkaisutaitojen kehittäminen (Komiteanmietintö 1970; Opetushallitus 2014). Kyseinen tavoiteasetelma jäsentää opetusta ja tarjoaa analyttistä otetta oppimisprosessin tarkasteluun. Käytännön tilanteissa ajattelua, ymmärtämistä ja ongelmanratkaisua ei kuitenkaan voida pitää erillisinä tapahtumina vaan toisiaan tukevinä prosesseina oppimisessa. Ymmärtäminen voi viitata esimerkiksi informaation käsittelyyn, jolloin se on avaintekijä konseptuaalisen tiedon oppimisessa (Haapasalo 2004, 50; Kilpatrick 2009, 42; Koskinen 2009). Tämän tutkimuksen tarkoitus on tuottaa käyttökelpoista tietoa (Carr & Kemmis 1986, 162) matematiikan opetukseen erityisesti ymmärtämisen näkökulmasta.

Edellisissä luvuissa on kartoitettu ja analysoitu tutkimusalueen keskeiset käsitteet. Tämä luku alkaa tutkimuskysymyksillä ja jatkuu tutkimusmenetelmien esittelyllä. Näihin kuuluu myös menetelmien luotettavuuden tarkastelut ja tutkimuseettiset erityiskysymykset. Luvun loppupuolella on esitetty tiivistelmät alkuperäisistä julkaisuista.

4.1 Tutkimuskysymykset

Tutkimuksen alussa sanan 'ymmärtämisen' monimerkityksisyys aiheutti hämmennystä ja viritti monia kysymyksiä sen luonteesta ja tehtävistä oppimistapahtumassa. Tilanteen selvittämiseksi oli etsittävä vastauksia muun muassa seuraaviin kysymyksiin: Mitä tarkoitetaan ymmärtämisellä? Mitkä ovat ymmärtämisen komponentit? Mitä lähikäsitteitä sillä on? Mitä tehtäviä ymmärtämisellä on mielekkäässä oppimisessa? Mikä on tiedon ja ymmärtämisen suhde? Miten ymmärtämistä voidaan edistää? On vielä huomattava, että tieto ja ymmärtäminen ovat kietoutuneet toisiinsa sillä tavoin, että niiden käsittely erillisinä on hankalaa. Toisinaan ymmärtämisen käsite vaikuttaa tiedon yläkäsitteeltä, ja toisinaan osat vaihtuvat. Vasta näiden selvitysten pohjalta päästään kokoavan rakennelman tekemiseen.

Tutkielman lopputulos tehdään seuraavien kysymysten pohjalta:

1. Mikä on käsitteiden asema ymmärtämisessä?
2. Mikä on kysymysten tehtävä mielekkäässä oppimisessa?

3. Mitä tehtäviä ymmärtämisellä on mielekkäässä oppimisessa?
 - 3.1 Mikä on käsitteellisen tiedon asema mielekkään oppimisen mallissa?
 - 3.2 Mikä on tulkinnan tehtävä mielekkään oppimisen mallissa?
 - 3.3 Miten synteesi toimii mielekkään oppimisen mallissa?
 - 3.4 Mikä on ongelmanratkaisun asema mielekkään oppimisen mallissa?
 - 3.5 Mikä on akkommodaation tehtävä mielekkään oppimisen mallissa?

Sarjan ensimmäisen kysymyksen tehtävä on saada ote sanan 'käsite' sisällöstä ja merkityksestä, jotka ovat ymmärtämisen avaintekijöitä. Toinen kysymys etenee ymmärtävän oppimisen ehtoihin, eli miten tietoverkon elementit perustellusti liitetään toisiinsa osuvilla *kysymyksillä*. Kolmas kysymys rakentaa edellä mainittujen alkeiselementtien ja kytkentöjen varaan mielekkään oppimisen mallin, jossa kullakin *ymmärtämisen muodolla* on sille ominainen tehtävä.

Ensimmäiseen kysymykseen vastataan artikkelien A ja B pohjalta. Artikkelit C ja E ovat perustana toisen kysymyksen käsittelyssä. Ymmärtämisen tehtäviä mielekkään oppimisen puitteissa tarkastellaan artikkelien D ja E mukaan.

4.2 Tutkimusmenetelmät

Tässä työssä on käytetty tutkimusotetta, jota taustoittaa toimintatutkimus ja laboratoriotutkimus, mutta niiden ohella on myös filosofinen orientaatio vaikuttamassa. Toimintatutkimus ei nojaa valmiiseen teoriaan, eivätkä teoria ja käytäntö ole erillisiä, vaan lewiniläisittäin ne täydentävät toisiaan. Koska tutkimuksen painopiste on uuden toimintamallin suunnittelussa ja kehittämisessä, kysymyksessä ei ole myöskään laboratoriotutkimus vaan näiden yhdistelmä (Heikkinen & Syrjälä 2007, 67). Tavoitteesta riippuen tutkimustoiminta voi edetä syklisenä tai suunnittelupainotteisena (Brown 1992; Collins ym. 2004; Heikkinen ym. 2007). Tämä työ oli suunnittelupainotteinen ja eteni vaiheittain siten, että julkaistut artikkelit täydensivät toisiaan ja tuottivat lopulta synteessin tuotoksena oppimismallin. Tutkijan tehtävä oli osallistua tutkimaansa toimintaan, toteuttaa muutokseen tähtääviä opetuskokeiluja ja tehdä niiden perusteella tilannearviointeja.

Sen lisäksi, että tällainen tutkimus on tekijälleen oppimistilanne, se tuottaa kolmenlaista tietoa: metodista tietoa, aihekohtaista tietoa ja tietoa tuotteesta (Edelson 2002). Tässä työssä ensimmäisessä vaiheessa selvitetään, miten matematiikan ymmärtämistä voidaan tutkia, edistää ja arvioida. Aihekohtaisen osion tehtävä on selvittää, mitä tiedetään aiemman tutkimuksen perusteella. Tutkimus on saavuttanut tavoitteensa, kun työ on tarjonnut virikkeitä tekijälleen sekä tuottanut käyttökelpoista tietoa ja toimintamallin omalle ammattikunnalleen (Heikkinen ym. 2007, 67-69). Habermasin luokituksessa (Niiniluoto 1984, 72) tulokset palvelevat käyttäjiänsä ainakin teknisen ja praktisen tiedon intressin osalta.

Luonteensa ja tehtävänsä mukaisesti toimintatutkimus ei ole varsinaisesti tutkimusmenetelmä vaan pikemminkin lähestymistapa tai asenne, jossa tutkimus pyritään

kytkemään toiminnan kehittämiseen. Toimintatutkimus sallii monipuolisen menetelmävalikoiman. Menetelmien rinnakkaiskäyttö on saanut nimekseen mixed-methods (Heikkinen 2007, 37), mikä sisältää sekä kvalitatiivisen että kvantitatiivisen aineiston keräämisen, analysoinnin ja raportoinnin (Creswell & Plano Clark 2007). Menetelmien rinnakkaiskäyttö on saanut osakseen myös kritiikkiä, koska niiden taustalla voi olla toisistaan poikkeavia ihmiskäsityksiä tai episteemisiä ja ontologisia sitoumuksia. Näkökulmien sekaannusta voidaan kuitenkin välttää pitämällä mielessä, minkä tason todellisuutta kulloinkin tarkastellaan, ja mikä on relevantein tapa saada tietoa juuri kyseisestä tasosta (Jussila 1992). Esimerkiksi oppiminen on prosessi, missä taitojen lisääntymistä voidaan mitata kvantitatiivisesti, mutta taitoihin liittyvien periaatteiden oivaltaminen tai ymmärtämisen kokemus kuuluvat laadullisen tutkimuksen piiriin.

Tässä työssä käytetään menetelmäperhettä, johon kuuluvat systemaattinen analyysi, fenomenografia, diskurssianalyysi ja tilastomenetelmä. Tällaisella menetelmäjoukolla on pyritty saamaan monipuolisempaa ja syvempää kuvaa 'ymmärtämisestä' kuin yksittäinen menetelmä sallisi. Eklektivismin haittoja on pyritty minimoimaan ottamalla huomioon menetelmiin kuuluvat ihmiskäsitysten ja filosofisten taustaoletusten erot kussakin tutkimustilanteessa (Eskola & Suoranta 1998, 70).

Menetelmien käyttö jakautuu siten, että teoreettisessa osassa käytetään systemaattista analyysiä (Jussila ym. 1989) ja toiminnallisessa osassa menetelmänä on mixed-methods. Viimemainittuun kuuluu kvantitatiivisia ja kvalitatiivisia menetelmiä. Jälkimmäisiä edustaa fenomenografia ja diskurssianalyysi. Tutkimus on suoritettu vaiheittain ja tulokset on julkaistu referoiduissa aikakauslehdissä (A, B ja C) ja kansainvälisten konferenssien referoiduissa julkaisusarjoissa (D ja E). Menetelmien käytön selkeyttämiseksi niitä tarkastellaan erikseen.

4.2.1 Systemaattinen analyysi

Systemaattinen analyysi ei ole minkään erityisen koulukunnan omaisuutta, vaan sitä voidaan harjoittaa monissa tutkimuksen traditioissa (Jussila ym. 1989, 157). Systemaattinen analyysi on teoreettinen tutkimusote, jolla on kaksi perustehtävää: analyyttinen ja synteettinen. Näiden välillä on monipuolinen vuorovaikutus (emt., 158). Analyytisyys viittaa tekstin käsitteelliseen erittelyyn sekä osien suhteuttamiseen toisiinsa ja kokonaisuuteen. Synteettinen toiminta on käsitteen, ajatuksen tai ajatusrakennelman (teorian, aatteen, suunnitelman tms.) kokoavaa luomista. Kyseiset toimintaulottuvuudet edellyttävät toisiaan, koska analyysin lähtökohtana on edellisen analyysin tulos. Systemaattisuuden vaatimuksena on sisällöllinen yhtenäisyys (emt. 159). Se ei tarkoita sitä, että aineiston olisi oltava loogisesti johdonmukainen, vaan kohteen ajatusrakennelmissa on voinut tapahtua huomattavia muutoksia tai siihen liittyy eri aikakausia.

Lähtökohdan mukaan systemaattisesta analyysistä esiintyy kaksi erityyppistä menettelytapaa: taustaperusteinen ja immanentti. Taustalähtöisen menettelytavan tulkinnoissa ja erittelyissä voidaan käyttää kohteen ulkopuolelta otettuja käsitteitä, viitekehkyksiä tai teorioita. Immanentissa eli tekstilähtöisessä menetelmässä ei turvauduta ulkopuolisiin keinoihin, vaan tutkimuksen kohteena olevan tekstin analysointi tapahtuu sisäisenä prosessina sen omilla käsitteellisillä välineillä. (Jussila ym. 1989, 198).

Systemaattinen analyysi käynnistyy usein yksittäisen tutkijan tai käytännön kasvat-
tajan ajatusmaailmasta, mutta analyysi voidaan suorittaa myös jonkin ryhmän, orga-
nisaation tai instituution tuottamista ajatuksista. Tutkimustehtävä rajataan tavallisesti
sitien, että pääongelmaksi otetaan henkilön, ryhmän tai instituution ajattelusta keskei-
nen käsite tai ajatuskokonaisuus. (Jussila ym. 1989, 159). Analyysin suorittamiseen
kuuluu kolme päävaihetta:

1. ongelman ja aineiston hahmottamisvaihe,
2. varsinainen analyysivaihe ja
3. analyysitulosten selittämisen- ja käyttövaihe.

Tämä työ käynnistyi ensimmäisen asteen analyysillä, joka ei kuulu varsinaisesti syste-
maattiseen analyysin työtapoihin (Jussila ym. 1989, 159). Tässä vaiheessa kartoitettiin
sanan 'ymmärtäminen' käyttötapoja oppimista ja opetusta käsittelevässä kirjallisuudes-
sa. Alustavaa tutkimuskentän kartoitusta tehtiin etsimällä sopivaa kirjallisuutta analyysiä
varten ymmärtämiseen ja sen lähikäsitteisiin kuuluvilla hakusanoilla. Oleellinen osa
tutkimusmateriaalia saatiin opetussuunnitelmista ja paljon siteeratuista tutkimuksista.
Toisessa vaiheessa analysoitiin kerätystä aineistosta ymmärtämistä ja sen lähikäsitteitä
oppimisen näkökulmasta. Siinä selvitettiin sanan 'käsite' merkitystä ja tiedon roolia
ymmärtämisessä (julkaisut A ja B). Olennainen osa analysointia oli teksteissä esiinty-
vien implisiittisten ilmausten ja piilomerkitysten selvittämistä. Viimeisessä vaiheessa
kehitettiin analyysien pohjalta kokoava ajatusrakennelma ymmärtämisen roolista mie-
lekkäässä oppimisessa (D).

4.2.2 Mixed-menetelmät

Empiirinen tutkimusaineisto on kerätty Lapin yliopiston opettajankoulutuksen mate-
matiikan peruskurssin opiskelijoilta. Siinä oli kaksi opetusryhmää, joista toinen ryhmä
suoritti kurssinsa perinteisellä menetelmällä ja osoitti asian hallinnan lopputentillä.
Toisen ryhmän opiskelijat perehtyivät kurssin sisältöön pohdiskellen ja kirjoittaen
päiväkirjaa opintojensa edistymisestä. Raporteissa he kertoivat päättelyistään, kohtaa-
mistaan ongelmista sekä niiden ratkaisusta ja myös voittamattomista esteistä. Tämän
ryhmän opiskelijat saivat opettajalta aiheeseen liittyviä kysymyksiä pohdittavaksi. Kir-
joitettu selonteko tuli palauttaa viikoittain kurssin pitäjälle arvioitavaksi, ja he saivat
pohdintoistaan palautteen parin päivän sisällä. Kurssin alussa ja lopussa opiskelijoiden
laskutaitoja testattiin laskutehtävillä.

4.2.2.1 Kvantitatiivinen menetelmä

Kvantitatiivisen metodin ydin on siinä, että ontologisen realismin mukaista todelli-
suutta tarkastellaan ”muuttujista” koostuvilla järjestelmillä. Keskeisiä toimintoja ovat
erojen selittäminen ja vakioiminen (Alasuutari 2001, 47). Sana 'kvantitatiivinen' viittaa
siihen, että havainnon kohteen laatuihin voi liittyä aste-eroja esimerkiksi iän, lämpö-
tilan, paremmuuden tai sukupuolen perusteella. Laadun kvantifioiminen voidaan suo-
rittaa mitattavasta ominaisuudesta luokittelu-, järjestys- välimatka- tai absoluuttisella

asteikolla. Kohteesta saatavat mittaluvut tai pistemäärät ovat muuttujien eli variaabelien arvoja, ja niiden käsittelemistä helpotetaan tilastomatematiikan avulla. Kohteista mitattujen pistemäärien jakaumat ja niiden vertailu toimivat tieteellisen päättelyn apuneuvoina, kun ilmiöille pyritään löytämään kuvauksia, selityksiä, analyyseja tai ennusteita. Jakaumien käsittelyyn ja niiden piirteiden tarkastelun helpottamiseksi käytetään tavallisesti tunnuslukuja kuten keskiarvoa tai hajontaa. Tunnuslukujen ja havaintojen tulkinta sekä johtopäätökset kuuluvat tutkijan tehtäviin.

Korrelaatiot ovat tilastollisia suureita, ja ne voidaan tulkita asioiden välisiksi yhteyksiksi tai jopa kausaalisuhteiksi. Korrelaatiolla selitetään tapahtumia tai annetaan niiden mukaan ilmiöille ennusteita, kun otetaan huomioon mahdolliset väliin tulevat tekijät. Tässä työssä pyrittiin selvittämään, oliko eri opetusmenetelmien käytöllä eroa opiskelijoiden laskutaitoon. Ensin selvitettiin opetuksen vaikutusta laskutaitoon ryhmien sisällä ja sitten tutkittiin, oliko laskutaitojen kehittymisessä eroa eri opetusryhmien välillä. Laskutaitoja mitattiin kolmiportaisella asteikolla, ja korrelaatio laskettiin molemmissa ryhmissä eri testikertojen välillä. Korrelaatiokerroin osoittaa, missä määrin alkumittauksella voidaan ennustaa loppumittauksen pistemääriä.

Tutkittaessa ymmärtämisen ja laskutaitojen välistä yhteyttä oppimisessa käytettiin kvantitatiivista ja kvalitatiivista tutkimusmenetelmää täydentämään toisiaan. Tulosten perusteella näyttää siltä, että omaehtoinen ponnistelu ja laskuoperaatioiden toimintaperusteiden pohdiskelu tuottavat parempaa laskutaitoa. Saatuja tuloksia on verrattu tutkimuksiin, joita on julkaistu kansainvälisissä lehdissä.

4.2.2.2 Kvalitatiiviset menetelmät

Yhteiskuntatieteet suuntaavat tutkimuksensa usein ihmiseen, hänen tunteisiinsa ja toimintoihinsa tai kulttuurituotteisiin. Monet kohteet saattavat olla luonteeltaan sellaisia, että niistä on vaikea saada totuuden korrespondenssin olettaa objektiivista tietoa. Jos kohde ei ole kvantifioitavissa tai siitä ei haluta numeerista otetta, on paikallaan selvittää, olisiko jokin laadullinen menetelmä tarkoitukseen sopiva. Kvantitatiivisen tiedon ehdot sopivat huonosti laadullisiin menetelmiin. Tapauksesta riippuen objektiivisuus, toistettavuus ja yleistettävyyys voidaan korvata esimerkiksi tutkimusprosessin tai tuloksen uskottavuudella, vakuuttavuudella, käyttökelpoisuudella tai siirrettävyydellä (Eskola & Suoranta 1998). Tutkimusprosessi saattaa edetä esimerkiksi yhteisymmärryksen tai konsensuksen kautta, joiden taustalla voi olla ontologialtaan antirealistinen konstruktivismi ja suuri määrä tutkijan henkilökohtaisia esitietoja. Niinpä tutkimuksen luotettavuuden lisäämiseksi tutkijan on tunnistettava työhönsä vaikuttavat taustaoletukset mahdollisimman hyvin. Esimerkiksi testitehtäviin saattaa liittyä luotettavuutta vinouttavia tekijöitä. Tulkinnat, päättelyt ja johtopäätökset tuleekin liittää raportointiin niin selkeästi, että ne saavat lukijan vakuuttuneeksi toiminnan ja tulosten perusteista (emt., 220-223).

Tämän työn kvalitatiivisia menetelmiä ovat fenomenografia ja diskurssianalyysi, jotka kuuluvat empiiriseen tutkimustraditioon ja joissa tutkimusmateriaalina on teksti.

Fenomenografiassa tutkitaan ajatusmaailmaa kielen kautta, kun taas diskurssianalyysissa kieli ja kielenkäyttö ovat osa todellisuutta (Berger & Luckmann 1994). Marton

(1988; 1995) on kehittänyt oppimiseen ja oppilaan käsityksiin suuntautuvan tutkimusmenetelmän, fenomenografian. Siinä tutkitaan, miten ihmiset kokevat, tulkitsevat, ymmärtävät, käsittävät, havaitsevat tai käsitteellistävät maailmaa. Tämän työn kannalta erityisen kiinnostava on opiskelijoiden oppimiskäsityksen hierarkkinen luokitus. Siinä kuusiportaisen asteikon kolme viimeistä kategoriaa sisältää ymmärtämisen. Neljännen tason tunnuksena on *merkitys*, joka on luokituksen vedenjakaja (Marton ym. 1993, 288). Tämä erottaa ulkokohtaisen faktuaalisen tietämisen kolme alempaa luokkaa ymmärtämisestä, jossa oppija on löytänyt omakohtaisen näkemyksen asiasta (a way of seeing something).

Fenomenografiassa aineiston tulkintojen tulee vastata tutkittavan ajatuksia ja niiden tulee perustua tutkimuksen teoreettisiin lähtökohtiin (Ahonen 1994). Ajattelu voidaan luokitella erillisiin kategorioihin tai hierarkkisiin järjestelmiin. Edellisestä on esimerkkinä Tallin (2004) kolme kategoriaa: käsitteellis-esineellinen, proseptuaalis-symbolinen ja formaalis-aksiomaattinen. Hierarkkista systeemiä edustavat Martonin ym. (emt.) lisäksi esimerkiksi Bloomin (1956) tavoitetaksonomia tai Pirie ja Kierenin (1988) kehittämä ajattelun tasomalli. Ajattelutapojen, kykyjen ja taitojen määrittelyillä tai operationalisoinnilla on pyritty siihen, että pystyttäisiin arvioimaan osaamisen tasoa. Näin on tehty esimerkiksi Bloomin taksonomiassa. Hienojakoisempaa tietoa luokista saadaan esimerkiksi haastattelujen, päiväkirjojen ja selontekojen avulla, kuten on tehty artikkeleissa C ja E.

Diskurssianalyysi on sosiaalipsykologiaan kuuluva tutkimusmenetelmä, joka nojaa sosiaaliseen konstruktionismiin (Gergen 1994). Siinä yksilötietoisuuden tilalle tulee diskurssi, joka on sosiaalisen vuorovaikutuksen ja kielenkäytön ilmenemismuoto (Gergen emt.; Sfarid 2008). Diskurssianalyysistä ei ole kuitenkaan muodostunut yhtenäistä tutkimusperinnettä, vaan menetelmästä esiintyy useita versioita. Artikkelissa C on käytetty brittiläisen perinteen sovellutusta (Potter & Wetherell 1987; Edwards 1993; Jokisen ym. 1993, 1999). Käyttäessään kieltä yksilö konstruoi eli merkityksellistää kohteet, joista hän puhuu tai kirjoittaa. On huomattava, että kielelliset ilmaisut eivät ole representatiivisia tai referentiaalisia niin kuin reaalitieteissä. Kieli ei ole todellisuuden kuva, vaan osa todellisuutta itseään (Jokinen ym. 1993, 9). Tässä on tietysti huomattava, että tutkittava yksilö voi tuntea kohtaavansa todellisuuden sellaisenaan ja kertoa asioista niiden ”oikeilla nimillä”. Konstruktiivisuuden idea liittyy sosiaalisesti jaettuihin merkityssystemeihin, jolloin voidaan puhua yhteisen ymmärryksen järjestelmistä (Silverman 1985, 118).

Kommunikaatiotilanteissa yksilö ymmärtää puheen merkityksen, jos hän on oppinut riittävän määrän kielen käyttöäntöjä. Diskurssianalyysi tarjoaa oppimisen ohjaamiseen keinoja löytää esimerkiksi sellaisia ajatustottumuksia eli diskursseja, jotka rajoittavat opiskelijan työskentelytapaa kuten laskusääntöjen kaavamaisista käyttöä.

Konstruktionistisessa viitekehityksessä diskurssianalyysin tehtävä on selvittää, miten opiskelijan maailmankuva eli diskurssi kehkeytyy tai miten hän rakentaa sitä. Opiskelutilanteissa opiskelija tulkitsee oppimateriaalia aiemmin hankkimansa tiedon pohjalta. Hänellä saattaa olla tarjolla ristiriitaitilanteita tai joukko kilpailevia tulkintavaihtoehtoja, jolloin edessä on valintatilanne. Opiskelijoiden puheenvuorot, keskustelut, väittelyt

ja kirjoitukset ovat diskurssianalyysin empiiristä tutkimusmateriaalia, jota kutsutaan tekstiksi. Analysoinnin tehtävä on tunnistaa tekstistä oppimisen diskursiivisia moninaisuuksia ja niiden tuottamisen tapoja. Tutkijan metodiseen valmiuteen kuuluu etsiä ihmettelyn aiheita kuten ristiriitaisia jännitteitä, urautumista tai hienosäätöä (Jokinen ym. 1993, 13). Tulokinnan perusteltavuutta ei ole mahdollista arvioida muulla tavoin kuin seurustelemalla aineiston kanssa riittävän tiiviisti ja raportoimalla seurustelun kulussa kehkeytyneitä havaintoja uskottavalla tavalla (emt. 13).

Tässä tutkimuksessa osa opiskelijoista kirjoitti opiskelustaan ja työskentelytavoistaan oppimispäiväkirjoja tai selontekoja. Oppimispäiväkirjat ovat artikkelin C empiiristä tekstiaineistoa, josta diskurssianalyysin avulla on tunnistettu matemaattisen ajattelun, oppimisen, ristiriitojen ja ymmärtämisen tapoja eli diskursseja.

4.3 Luotettavuus

Tieteellisen tutkimuksen tehtävä on tuottaa ja tarjota todellisuutta koskevaa olennaista, tärkeää ja merkityksellistä informaatiota (Niiniluoto 1988). Informaatiolta ja sen hankkimismenetelmältä edellytetään myös luotettavuutta, jonka taustalla ovat klassisen määritelmän mukaiset totuus ja perustelu. Nämä molemmat ovat kiistanalaisia ja riippuvat tiedon menetelmän lisäksi taustalla olevista ontologisista ja epistemologisista oletuksista.

Luotettavuuden tarkastelun selkeyttämiseksi aihetta tarkastellaan seuraavaksi menetelmä kerrallaan. Koska tutkija on tutkimukseen osallistuvien opiskelijoiden opettaja, se aiheuttaa luotettavuuden lisäksi myös tutkimuseettisiä erityiskysymyksiä. Tämän vuoksi tutkimusta on lopuksi tarkasteltu myös eettisestä näkökulmasta.

4.3.1 Systemaattinen analyysi

Systemaattisen analyysin arviointi on suoritettava aiheenmukaisin kriteerein (Jussila ym. 1989, 201), mikä koskee menetelmän kaikkia kolmea vaihetta: ongelman ja aineiston hahmottaminen ja kerääminen, analyysitulosten selittäminen ja käyttö. Aineiston keruu käynnistyi tiedostoista aiheen mukaisten hakusanojen 'understanding' ja 'comprehension' käyttötapojen kartoituksella. Pian osoittautui, että sana 'meaning' liittyi näihin läheisesti. Kyseisten sanojen ympärille kertyi runsaasti kirjallisuutta, joten ongelmaksi tuli kirjallisuuden rajaaminen. Tutkimus ei perustunut ulkopuoliseen viitekehukseen pääsanojen tulkinnasta, vaan tekstien tulkinnassa pyrittiin pysymään immanenssin mukaisesti tekstin sisäisessä ajatusmaailmassa. Kirjoittajan ajatusmaailman tavoittaminen edellyttää hänen käyttämänsä kontekstin löytämistä, jonka varassa tutkija pystyy puolestaan pääsemään tekstin ajatusmaailmaan. Lähiluennassa pyritään kiinnittämään huomiota tekstien sanavalintoihin, "piilomerkityksiin" ja käytettyihin lähteisiin, jotka usein paljastavat kirjoittajan valitseman kontekstin tai antavat viitteitä sisältöön vaikuttavasta tausta-ajattelusta.

Tutkimuksen luotettavuus riippuu siitä, kuinka hyvin tutkija onnistuu aineiston valinnoissa ja tekstien tulkinnoissa. Tähän ongelmaan on vaikea löytää päteviä ohjeita,

kuten Jussila ym. (1989, 204) toteavat. Tulosta on pyritty varmistamaan vertaamalla omia tulkintoja muiden tutkijoiden tekemiin ja myös aineiston ulkopuolelta löytyvissä lähteissä tehtyihin tulkintoihin. Viime kädessä tulkinta palautuu uskottavuuteen, jonka ratkaisijoina ovat tutkijan ohella myös tutkimuksen lukijat. Aineiston kartoituksessa ei ollut käytettävissä tukijakumppania.

Aineiston rajaaminen ja pääkäsitteiden ”understanding”, ”comprehension” ja ”meaning” etsiminen etenivät samanaikaisesti. Sanalle ’ymmärtäminen’ löytyi neljä tämän työn kannalta relevanttia merkitystä, ja sanan ’merkitys’ valikoima supistui kolmeen. Kirjallisuuden laajentaminen lopetettiin, kun aineisto alkoi kylläntyä (Huovinen & Rovio, 2007, 105) eikä uusia tulkintoja edellä mainituille hakusanoille enää löytynyt. Immanentin analyysin etuna on, että sen taustateoria ei rajoita uusien käsitteiden, näkemysten tai ajatusrakennelmien löytämistä ja erittelyä. Toisaalta koherentin synteessin tekemistä vaikeuttaa se, että löydettyt käsitteet saattavat kuulua useille tiedonalueille kuten filosofiaan, lingvistiikkaan, sosiologiaan tai psykologiaan.

4.3.2 Mixed-menetelmät

4.3.2.1 Kvantitatiivinen menetelmä

Kvantitatiivisella tutkimusmenetelmällä viitataan tavallisesti tutkimusaineiston hankintatapaan ja sen matemaattiseen käsittelyyn, joka riippuu siitä, millä asteikolla kohdetta on mitattu. Kerätyn havaintoaineiston mittalukuja voidaan käsitellä tilastollisin menetelmin. Laskettujen tunnuslukujen perusteella tulkitaan, päätellään ja selvitetään meitä kiinnostavia asioita kuten riippuvuuksia tai seuraamuksia. Tutkimuksen luotettavuus riippuu instrumentin pätevydestä, kohteen pysyvyydestä, mittaustarkkuudesta, tilastollisen menetelmän käytöstä ja tulkinnasta (Vahervuo & Kalimo 1968).

Tutkimuksen luotettavuutta arvioidaan empiristisen perinteen mukaan validiteetin ja pysyvyyden käsittein (Vahervuo & Kalimo 1968, 155). Validiteetilla eli pätevyydellä tarkoitetaan sitä, kuinka hyvin tutkimusmenetelmä sopii juuri sen asian tutkimukseen, jota on tarkoitus tutkia. Pysyvyydellä on kaksi komponenttia: konstanssi ja reliabiliteetti. Jos sattumanvaraisuus johtuu mitattavan ominaisuuden luonteesta, on konstanssi heikko. Reliabiliteetti ilmaisee testipysyvyyden. Jos se on pieni, sattumanvaraisuus aiheutuu itse testistä. Testin pysyvyyden määrittämiseen on tässä työssä käytetty alkutestin puolitusmenetelmää, joka saadaan osatehtävien korrelaatioiden suhteesta (emt. 157). Tästä käytetään myös nimitystä puolitusreliabiliteettikerroin.

Luotettavuuden primääritekijä on mittauksen validiteetti, sillä siinä tehtyjä virheitä ei voida korjata tilastomenetelmillä tai tulkinnoilla. Missä määrin mittaus vastaa kohteen ominaisuutta, on periaatteessa ongelmallinen ainakin korrespondenssin kriteerein. Tässä työssä mittausten luotettavuutta on pyritty lisäämään itse tutkimusprosessin kautta, jossa kolme matematiikan opettajaa arvioi testisuorituksia (Artikkeli E). Heiltä on edellytetty yksimielistä pisteytystä kunkin tehtävän kohdalla. Testien osalta laskutaidon mittausta häiritseviä taustatekijöitä on pyritty vakioimaan seuraavasti: Testit on suoritettu oppituntien aikana ja valvotusti. Tehtävät ovat olleet eri vuosina samoja tai lähes samoja. Alku- ja lopputestien tehtävät eivät ole poikenneet toisistaan oleellisesti, vain numeroarvot ovat eronneet. Eri vuosikurssien suorituksia on voitu

tutkia yhtenä ryhmänä, koska kurssin ohjaaja, ajankohta, sisältö ja opetusmenetelmät ovat olleet samoja.

Tuloksista laskettiin molemmissa ryhmissä koehenkilöiden tehtäväkohtaisten alkua ja loppupisteiden erotuksen keskiarvo. Erotuksen merkitsevyyttä testattiin t-testillä. Asteikon sopivuus ja suuri vertailtavien ryhmien koko sallivat t-testin käytön (Va-hervuo & Kalimo 1968,183). Otoskeskiarvojen jakauma suurilla otoksilla noudattaa todennäköisesti normaalijakaumaa, vaikka alkuperäiset pistemäärät eivät sitä nou-dattaisikaan (Guilford 1956). Myöskään ryhmien riippumattomuusehto ja jakauman muotoon kuuluva vaatimus eivät tuottaneet estettä kyseisen testin käytölle. Molemmat vertailuryhmät oli muodostettu neljältä peräkkäiseltä vuosikursilta, ja ryhmien välil-lä vallitseva tasaisuus todettiin Mann-Whitneyn U-testillä (Siegel 1956, 116). Näitä kvantitatiivisia menetelmiä on käytetty artikkelissa (E).

4.3.2.2 Kvalitatiiviset menetelmät

Kvalitatiivisissa menetelmissä on lähtökohtana tutkijan avoin subjektiviteetti ja sen myöntäminen, että tutkija ei ole vakioitava taustahäiriö vaan tutkimuksensa keskei-nen tutkimusväline. Tutkimuksen pääasiallinen luotettavuuden kriteeri onkin tutkija itse, ja näin ollen luotettavuuden arvio koskee koko tutkimusprosessia. Tutkimuksen arviointia varten tulisi tekstissä näkyä riittävästi tutkijan käyttämiä taustatietoja ja näkökulmia (Eskola & Suoranta 1998, 211), joita seuraavaksi valaistaan käytettyjen menetelmien osalta.

Diskurssianalyysin keskeisiä käsitteitä ovat kieli, merkit ja merkitykset. Artikke-lissa C tutkitaan, miten opiskelijat rakentavat omaa matematiikan todellisuuttaan eli diskurssiaan.

Luotettavuuden arvioinnissa pätevyyden ja pysyvyyden sijasta voidaan puhua mie-luummin aitoudesta ja sovellettavuudesta. Edellinen viittaa siihen, onko tekstin tul-kinnoissa onnistuttu avaamaan kirjoittajan diskurssin rakentamista kuvaava tulkinta (Eskola & Suoranta 1998, 218). Sovellettavuudella tarkoitetaan menetelmän käyttökelpoisuutta vastaavissa oppimisen arviointitilanteissa, joten voidaan puhua kuvaustavan siirrettävyydestä tai jopa yleistettävyydestä (ks. Kaasila 2000, 234). Luotettavuuden lisäämiseen on pyritty tutkijatriangulaation avulla, kun kaksi tutkijaa on lukenut tutki-musaineiston selontekoja ja päiväkirjoja moneen kertaan löytääkseen ymmärtämiseen, päättelyyn ja oppimiseen liittyviä diskurssiluokkia. Luokista on sitten keskusteltu ja tehty johtopäätöksiä. Kirjatuilta luokitteluilta ja johtopäätöksiltä on edellytetty tutki-joiden yksimielisyyttä.

Raporttiin on kirjoitettu otoksia selonteosta, ja esitetty tulkinnat siitä, miten opiskelijat rakentavat diskurssejaan. Otokset tulkintojen yhteydessä tarjoavat lukijoille mahdollisuuden koetella ja arvioida tutkijan päätelmiä omilla tulkintoillaan. Tällä tavoin on pyritty lisäämään raportin tekstiin uskottavuuden ja käyttökelpoisuuden tuntua.

Fenomenografassa luotettavuuden arviointikriteereinä pidetään vastaavuuden lisäksi siirrettävyyttä, tutkimustilanteen arvioitavuutta ja vahvistettavuutta (Cuba & Lincoln 1985). Siirrettävyydellä tarkoitetaan, että tuloksia voidaan soveltaa toisissa

konteksteissa. Tutkimustilanteen arvioinnilla pyritään antamaan mahdollisimman autenttinen kuva oppimis- ja tutkimusympäristöstä. Tällä lisätään tutkimuksen uskottavuutta ja siirrettävyyttä. Vahvistettavuus vastaa perinteisen ajattelutavan mukaan objektiivisuutta subjektiivisuuden vastakohtana. Kvalitatiivisessa tutkimuksessa on subjekti kuitenkin tutkimusväline, ja sitä voidaankin pitää menetelmän vahvuutena. Oikeastaan tutkijan äänen tulee kuulua tekstien tulkinnoissa ja analyyseissa. Objektiivisyyteen ei kuulu tutkijan henkilökohtaisten intressien tai asenteiden edistäminen tutkimukseen upotettuna.

Tässä työssä on tutkittu oppilaiden päättelyä ja ymmärtämistä heidän tuottamiensa selontekojen avulla. Teksteistä on poimittu otteita ja niistä on tehty luokkia ja päätelmiä. Luotettavuuden lisäämiseksi luenta, tekstien tulkinta ja johtopäätöksien tekeminen on suoritettu tutkijatriangulaation mukaisesti (Eskola & Suoranta 1998, 69) artikkelissa E ja D. Raportoidut päätelmät ovat neuvottelujen ja yhteisymmärryksen tuloksia. Tulkintojen uskottavuuden lisäämiseksi on artikkeleihin kirjoitettu tilannekuvauksia ja suoria siteerauksia selonteosta. Monipuolisimmin menetelmätriangulaatiota on käytetty mielekkään oppimisen mallin kehittämiseksi.

Yhteenveto luotettavuudesta: Tulosten luotettavuuteen liittyy aivan erityisiä ongelmia, kun tutkija itse opettaa ja tutkii saavutettuja oppimistuloksia. Toimintatutkimuksen näkökulmasta validiteetti ja reliabiliteetti sopivat huonosti luotettavuuden kriteereiksi, koska kysymyksessä ei ole olemassa olevan maailman kuvailu, vaan uuden toimintamallin kehittäminen muuttuvia tilanteita varten. Siksi tutkimuksen luotettavuuden arviointiin on etsittävä muita kriteerejä.

Uutta toimintamallia ei tehdä tyhjästä, vaan tutkijan on tunnettava toimintaympäristönsä sekä niiden taustaoletukset ja käytännöt mahdollisimman hyvin. Tältä pohjalta tutkija voi kuvitella suuren joukon toimintamalleja käytössä olevien lisäksi. Hänen on kuitenkin arvioitava kokemuksensa ja ennakkotietojen varassa, mitkä muutokset tai millaiset vaihtoehdot toimintamallit ovat mahdollisia. Uuden toimintamallin suunnittelussa on tehtävä hyvin perusteltuja valintoja mahdollisten maailmojen joukosta. Valintoja rajoittaa suuri joukko psykologisia, sosiaalisia, taloudellisia ja kulttuuriin liittyviä tekijöitä. Kehitetyn mallin toimivuutta selvitetään kokeiluilla eli interventioilla, joiden tehtävä on antaa tietoa artefaktin käyttökelpoisuudesta.

Nähdään, että toimintatutkimusta ei suoriteta ennakoasetelmien, hypoteesien tai toistettavuuden varaan, vaan kehittelyä luonnehtii uteliaisuus, innovaatio, interventio, rohkeat arvaukset ja relevanttien vaihtoehtojen etsiminen. Lincoln ja Cuba (1985) ovat ehdottaneet tutkimuksen luotettavuuden arviointiin objektiivisuuden, toistettavuuden ja yleistettävyyden sijasta tuotetun mallin uskottavuutta, käyttövarmuutta ja siirrettävyyttä. Uskottavuuteen vaikuttaa se, kuinka hyvin aineiston valinta, sen analyysi, johtopäätökset ja tulosten siirrettävyys saavat lukijan vakuuttuneeksi (ks. Kaasila 2000, 217-234). Tämän työn teoreettiseen osaan on etsitty paljon maineikkaiden filosofien ja tutkijoiden tuotantoa. Runsaasta tarjonnasta johtuen kirjallisuuden valinta suoritettiin sen mukaan, kuinka relevantilta aineisto vaikutti tutkimuksen aihepiiriin kannalta. Selkeän kriteeristön puutteessa merkittäviä lähteitä on voinut jäädä ulkopuolelle ja rajatapauksissa kyse on lopultakin makuasioista. Käytetyn kirjallisuuden

osuvuutta ja kattavuutta lukija voi arvioida tutkimuksen referensseistä. Päätelmien ja luokituksen objektiivisuuden lisäämiseksi on käytetty tutkijatriangulaatiota. Tutkimuksen luotettavuutta on pyritty lisäämään myös avoimuudella, kun testitehtävät ja suoria tekstilainauksia on liitetty tekstiin.

Mallin käyttövarmuus ja siirrettävyys kärsii siitä, että sen soveltaminen riippuu kulloisestakin toimintaympäristöstä eikä kontekstin jäännöksetön kuvaus ole tutkijalle juuri mahdollista. Uskottavuuden lisäämiseksi mallin käyttökelpoisuutta on koeteltu Artikkelissa E, jonka mukaan laskutaito kehittyi raporttiryhmässä paremmin kuin kurssin tentillä suorittaneessa ryhmässä. Lisäksi mallin käyttökelpoisuutta on pyritty lisäämään ohjeistuksella, miten ymmärtämistä voidaan arvioida diskurssianalyysin avulla (Artikkeli C).

Heikkisen ja Syrjälän (2007, 159) mukaan yksi tutkimuksen luotettavuuden kriteereistä on havahduttavuus. Tämän tutkimuksen eräs tehtävä on havahduttaa lukija huomaamaan, että ymmärtäminen ei perustu mihinkään itsestään selvään joko/tai-asetelmaan, vaan sillä on monia tehtäviä ajattelussa, kommunikoinnissa ja oppimisessa. Tuotettu malli on täyttänyt tältä osin tehtävänsä, jos se haastaa lukijansa syventymään kohtaamaansa ongelmaan ja kehittämään tarjolla olevan mallin puitteissa uusia ratkaisuja.

Aiheen valinnan kannalta huomio kiinnittyy tutkimuksen relevanssiin, jonka kriteerinä pitää tutkimuksen tärkeyttä, kiinnostavuutta ja näkökulman tuoreutta aiempiin tutkimuksiin verrattuna (Hammersley 1998, 111). Tärkeyttä ja kiinnostavuutta tuskin kukaan voi kiistää, kun katsoo eri maiden opetussuunnitelmien tavoitteita, kansainvälisten konferenssin ohjelmia tai ymmärtämistä käsitteleviä artikkeleita kansainvälisissä julkaisusarjoissa. Tutkimuksessa kehitetty artefakti on toimintatutkimuksen luonteen mukaisesti pikemminkin prototyyppi kuin loppuun hiottu oppimismalli (Heikkinen & Syrjälä 2007, 148). Potentiaalisella käyttäjäkunnalla on oikeus odottaa mallilta käyttökelpoisuutta ja hyödyllisyyttä Habermasin tiedon intressien mukaisesti (Niiniluoto 1984, 72). Tutkimukseen on kuitenkin voinut pujahtaa tutkijan henkilökohtaisia arvotilauksia, joita kriittinen lukija voi itse löytää.

Eettinen näkökulma ja luotettavuus palautuvat kahden roolin problematiikkaan, kun tutkija opettaa ja tutkii itse oppimistuloksia. Eettisiin kysymyksiin kuuluu kriittinen arvio seikoista, jotka koskevat tutkimuksen tekijän suhdetta kohteisiin ja tavoitteisiin. Tutkimuskohteesta tulisi saada totuudenkaltaista tietoa loukkaamatta tai saattamatta kohdetta huonoon valoon. Tavoitteiden tulee olla sellaisia, että ne edistävät ihmisarvoista elämää ja hyvinvointia. Tutkimuskohdetta tulee arvostaa ja ottaa huomioon hänen asenteensa ja arvomaailmansa. Tutkijan tulee olla avoin, rehellinen ja vilpitön sekä tutkimuskohdetta että tutkijatovereita kohtaan (Heikkinen ym. 2007, 180). Tutkijan velvollisuus on käyttää sellaisia menettelytapoja, jotka noudattavat eettisesti kestäviä toimintaperiaatteita. Eettinen aspekti ja luotettavuus liittyvät monin tavoin toisiinsa.

Toimintatutkimuksessa tutkija itse on usein tutkimus instrumenttina, joten väliin, kohteen ja tuloksen suhde on problemaattinen (Eskola & Suoranta 1998, 211). Tehtävien antamista ja kysymysten laatimista ohjaavat tutkijan taustaoletukset, jotka saattavat suunnata tehtävän suorittamista ja vastauksia tutkijan odotusten mukaan. Toi-

saalta suoritusten ja vastausten tulkintaa voivat vinouttaa tutkijan omat ennakko-odotukset. Empiirinen tutkimus Artikkeleissa C ja E on tehty yhteistyönä. Johdattelevien kysymysten välttämiseksi tehtäviä oli laatimassa vähintään kaksi matematiikan opettajaa. Lopulliset tulkinnat on saatu neuvottelujen tuloksena ja yhteisymmärryksessä. Laskutehtävien tarkistamisen ja tulkintojen luotettavuuden lisäämiseksi Artikkelissa E käytettiin vielä kolmatta matematiikanopettajaa. Ennen kuin artikkelit lähetettiin toimitukseen, ne luettiin moneen kertaan ja varmennettiin, että tulkinnoista oli päästy yksimielisyyteen.

Systemaattinen analyysi osoittautui yksin tehtynä vaativaksi, koska immanenssin mukaisesti lukijan tuli tavoittaa tekstin sisäinen ajatusmaailma ilman ulkoista tulkintakehystä. Tekstin sisäisen ajatusmaailman tavoittaminen edellytti tekstin tulkintaa sen omassa ympäristössään. Se puolestaan laajensi tutustumista kirjoittajan ja hänen aikalaistensa muihin vastaaviin teksteihin. Tulkintojen osuvuus pyrittiin varmistamaan vertaamalla omia tulkintoja toisten tutkijoiden vastaaviin töihin. (Jussila ym. 1989).

Empiirisen aineiston keräämisessä on kiinnitettävä huomio kohdehenkilöiden kohteluun. Matematiikan kurssiin osallistuneille ilmoitettiin, että tiettyihin opetuksen jaksoihin liittyi oppimisen tutkimista (ks. Hakkarainen 2007, 74). Kaikilta kurssiin osallistuneilta kysyttiin lomakkeella lupa käyttää heidän tuottamaansa materiaalia tutkimukseen. Lisäksi kysyttiin, voitaisiinko heidän suorituksiaan tai pohdintojaan liittää tutkimusraportteihin. Tutkimushenkilön paljastumisen välttämiseksi lainattiin vain lyhyitä tekstiosuuksia ja käytettiin peitenimiä (ks. Mills 2007, 105). Vain muutama opiskelija kielsi käyttämästä heidän kirjoituksiaan tai laskutehtävien suorituksia julkaisuissa. Tässä meneteltiin heidän toiveidensa mukaisesti. Artikkelit ovat olleet vähintään seitsemän vuotta saatavilla, eikä kukaan matematiikan kursseihin osallistuneista ole kommentoinut siteerauksia tai niiden tulkintoja.

Tutkimuksesta ja artikkelien sisällöistä on viime kädessä vastuussa tutkija itse. Referoituissa artikkeleissa lehden toimituksella on omat kriteerinsä tutkimuksen tasosta. Tämän työn neljä artikkelia hyväksyttiin lehteen ensimmäisellä kerralla. Artikkelia C tuli toimituksen toiveesta täydentää kaksi kertaa.

4.4 Tiivistelmät alkuperäisistä artikkeleista

4.4.1 (A) Leinonen, J. (2002). Ymmärtäminen – jäsentynyttä tietämistä. *Kasvatus* 33 (5), 475-483.

Tämän artikkelin tehtävä oli selvittää tietämisen ja ymmärtämisen suhdetta oppimisen näkökulmasta. Tutkimusmateriaaliin on valittu sellaisia tekstejä, joita oli siteerattu runsaasti. Materiaalin rajausta on tehty oppimispsykologisen ja lingvistisen näkökulman mukaan. Kysymyksessä on teoreettinen tutkimus ja menetelmänä on systemaattinen analyysi.

Otsakkeen mukaisen aiheen merkittävyyttä artikkelissa perustellaan sillä, että nykyisin tuotetun tiedon määrä on liian suuri hallittavaksi yksittäisinä tosiasiaväittäminä. Rajallisen muistikapasiteetin vuoksi hajallinen tieto tulisi korvata joustavilla tietojär-

jestelmillä, mikä yksilön kohdalla tarkoittaa jäsentynyttä eli ymmärrettyä tietoa. Asian selvittämiseksi kartoitettiin tiedon hallinnan kielellisiä, sosiaalisia ja psykologisia ehtoja.

Kahdessa ensimmäisessä luvussa tarkastellaan merkityksen muodostusta erilaisissa konteksteissa. Aluksi kysytään, mitä ovat asiat tai asiantilat, joista pyritään saamaan tietoa. Tekstissä päätellään, että asiat eivät ole pelkkiä oliojoukkoja vaan olioiden välillä täytyy olla kiinteät suhteet, jotka tekevät joukosta järjestyneen rakenteen. Myöskin symbolisilta esityksiltä edellytetään järjestystä, jonka mukaan sanoma voidaan tulkita ja asia ymmärtää. Artikkelissa on annettu esimerkki, miten kuuden pisteen joukosta on muodostettu ikonisia symboleja joidenkin asioiden kuvaamiseen. Annetussa esimerkissä osoitetaan lisäksi, kuinka tulkinta on sidoksissa kontekstiin ja tulkitsijan ennakkotietoihin.

Ymmärtämisessä kielellisen ilmaisun merkitys avautuu tulkinnan avulla, joka suoriteetaan käsitteellisen viitekehyksen puitteissa ja joka edellyttää taustatietoja aiheesta sekä tiedollisia taitoja. Osoittautui, että tulkintakehykset muodostavat pysyvyyden mukaan hierarkkisen järjestelmän (Vosniadou 1994). Pohjalla ovat pysyvimmät taustaoletukset ja periaatteet, jotka ovat usein tiedostamattomia eikä niitä tavallisesti kyseenalaisteta. Toista äärilaitaa edustavat viitekehykset, jotka ovat muutosherkkiä tilanteen vaihtelulle tai lisäinformaatiolle. Välille asettuvat ne mallit, jotka nojaavat pysyvään pohjaan, mutta muutoksia tapahtuu harvoin. Artikkelissa todetaan, että perusteita luotaavat paradigmojen muutokset ovat varsin vaikeita myös asiantuntijoille saatikka maallikoille.

Luvussa ”Ymmärtäminen ja merkit” tarkastellaan intressien ja taustatietojen vaikutusta siihen, millaista informaatiota havaintomateriaali tarjoaa. Esimerkkinä on mittarilukema, joka antaa symbolista informaatiota rutiinikäyttäjälle, mutta asiantuntijalle se on indeksin tarjoama informaatiota mitattavan kohteen tilasta.

Luvussa ”Tieto ja ymmärtämisen ehdot” selvitetään aluksi, millä tavoin ymmärtäminen toimii tietämisen resurssitekijänä. Samasta materiaalista voidaan poimia tietoa erilaisiin käyttötarkoituksiin pinnallisista rutiinisäännöistä syvällisiin teoreettisiin perusteisiin kuten on esimerkiksi Pythagoraan teoreeman laita. Tietoväittämän ymmärtämisen ehdoille on kehitetty seuraava kaavio mielekkään oppimisen viitekehyyksessä:

1. henkilö kokee väitteen mielekkääksi,
2. henkilö tuntee väitteen viitekehyksen,
3. henkilö pystyy tulkitsemaan väitteen em. viitekehyyksessä ja
4. henkilö on oikeutetusti vakuuttunut tulkinnastaan.

Mielekkyysehto edellyttää, että väite on relevantissa suhteessa henkilön kognitiiviseen struktuuriin. Tiedollisten perusteiden arvioimiseen tarvitaan menetelmätietoa ja taitoa seurata päättelyketjuja. Artikkelissa todetaan, ettei ymmärtäminen ainoastaan tehosta tiedon hallintaa, vaan myös lisää sen käyttökelpoisuutta kuten selittämistä, ennusteiden tekemistä, jäljittämistä ja soveltamista.

Loppupäätelmänä on, että sanalla ’ymmärtäminen’ on oppimisen näkökulmasta monia merkityksiä. Se voidaan nähdä laajana tiedollisten tapahtumien yläkäsitteenä,

johon kuuluvat myös emootiot. Ymmärtämistä voidaan pitää myös mentaalisenä tilana, jolloin se on otsakkeen mukaisesti jäsentynyttä tietämistä. Tämän järjestelmän puitteissa yksilö voi nähdä tapahtumat osana laajempaa kokonaisuutta tai käsitteellistä viitekehystä. Tiedollista aktiivisuutta korostavassa tulkinnassa ymmärtäminen on toimintaa, jossa kielelliset ilmaisut tulkitaan ja jossa oivalletaan niiden merkitykset.

4.4.2 (B) Leinonen, J. (2003). Käsite ja ymmärtäminen. *Kasvatus* 34 (1), 56-65.

Tämä artikkeli on teoreettista tutkimusta, jonka tarkoitus oli selvittää sanan 'käsite' tehtävää ja merkitystä ymmärtämisen, ajattelun ja oppimisen näkökulmasta. Tutkimusmenetelmänä on systemaattinen analyysi. Informaatiolähteeksi on pyritty valitsemaan edustava joukko alan kirjallisuutta: opetussuunnitelmia, opetusalan tutkimuksia, oppikirjoja, filosofisia selvityksiä ja sanakirjoja. Artikkelissa tarkastellaan käsitteen tehtävää, sen muodostusta, ontologista luonnetta sekä ilmaisutapoja ja edellä mainittujen keskinäisiä suhteita.

Artikkelissa on johdannon ja yhteenvedon lisäksi kaksi päälukua, joista otsakkeen 'Käsitteet' alla huomion kohteena ovat käsitteen välineellinen rooli, käsitteen suhde attribuutteihin ja tietoon sekä käsitteen konteksti- ja näkökulmariippuvuus. Toisessa pääluvussa "Merkki ja merkitys" esitellään merkin merkityksiä ja käsitteen sisällöllisiä seikkoja sekä merkin semioottisia lajeja: indeksi, ikoni ja symboli.

Käsitteitä pidetään ajattelun ja tiedon kulmakivinä, mutta niiden yleinen luonnehdinta johtaa helposti kehäpäätelmään, koska niiden analysointi vaatii yleisempää näkökulmaa ja sen käsitteistöä. Sitä vastoin käsitteiden tehtävä on selkeämpi, koska niiden avulla saadaan ajatuksellista ja myös konkreettista otetta meitä kiinnostaviin asioihin kuten matematiikan lukujoukkoihin. Käsitteiden avulla voidaan myös selittää esimerkiksi havaintoprosesseja, ajattelua ja käyttäytymistä. Käsitteet yleistyksinä antavat tietoa suuresta joukosta käsitteen alaan kuluvista olioista, asioista ja tapahtumista. Filosofisten suuntausten mukaan käsitteet voivat olla platonilaisittain ideaolioita, konseptualismissa mentaaliolioita tai sosiaalisen konstruktivismin tapaan kulttuuri- tuotteita ihmismielen luomuksina.

Käsitteiden ja attribuuttien sisällöllisiä ja kontekstuaalisia seikkoja on selvitelty omissa alaluvuissaan. Attribuuteilla tarkoitetaan olioiden ominaisuuksia ja suhteita, joita voidaan käyttää olioiden luokituksen perusteena. Koska yleiskäsitteet luokitte-luperusteina sisältävät olioiden yhteisiä ominaisuuksia, voidaan attribuuttejakin pitää käsitteinä. Kullakin tiedonalalla vallitsee sille ominaiset epistemologiset ja ontologiset sitoumuksensa, vaikka niitä ei oppikirjoissa useinkaan esitellä. Reaalitieteissä, kuten maantiede, tutkitaan jokia, järviä ja vuorten korkeuksia, ikään kuin niiden ominaisuuksiin saataisiin suora kontakti. Tavan takaa puhutaankin tutkimuskohteen ominaisuuksista ja suhteista niin kuin käsitteillä olisi käyttöä vasta teoreettisina entiteetteinä. Tällöin käsitteet ovat tietoisuuksia attribuuteista (Kivinen 1994).

Käsitteen kontekstisidonnaisuuteen on artikkelissa kiinnitetty erityistä huomiota. Oikeastaan ongelma palautuu termien käyttöön eri ympäristöissä. Eklektismiksi nimettyssä suuntauksessa ei ole otettu kyllin vakavasti käsitteiden taustaoletuksia, kun oppija aatehistoriallisesti yhteen sopimattomia asioita on yhdistelty näennäisesti toimivaksi

kokonaisuudeksi, kuten Kolbe tekee Miettisen (1998) mukaan. Kouluesimerkki kontekstiriippuvuudesta on sana 'voima', jonka merkitys on eri fysiikassa ja esim. teologiassa.

Toisessa pääluvussa "Merkki ja merkitys" tutkitaan ymmärtämistä lingvistiikan ja semiotiikan näkökulmasta. Merkkien käyttö on kommunikoinnin ehto ja sen tehtävä on merkitä jollekin jotakin jossakin suhteessa (Peirce 1992). Merkkilajeja ovat indeksi, ikoni ja symboli. Merkit viittaavat kohteeseensa. Kytkeä kutsutaan referentiaaliseksi suhteeksi. Vuorovaikutussuhde liittyy indeksin referenttiin, ja ikonin viittaus perustuu merkin ja kohteen samankaltaisuuteen. Symboliset ilmaisut ovat sopimuksenvaraisia: ne viittaavat merkityksiin eli kohteisiin ja sisältöihin, joista käytetään myös nimityksiä ekstensio ja intensio.

Merkit eivät kuitenkaan kannata merkitystä säiliön tavoin, vaan merkit toimivat pikemminkin tulkintavihjeinä vastaanottajalleen. Tekstin tulkinnassa ja sen sanoman tavoittamisessa eli ymmärtämisessä ovat taustatiedot ratkaisevassa asemassa. Tavanomaisessa kommunikoinnissa tai oppimateriaaleissa taustaoletukset ovat useimmiten vain implisiittisesti esillä. Ymmärtääkseen sanoman oikein oppijan on tunnettava sanoman relevantit taustat, muuten sanoman sisältö voi jäädä epäselväksi. Väärinymmärtämisen mahdollisuuksia on monia, joista artikkelissa on annettu esimerkki.

Artikkelissa päädyttiin maltillisen realismin mukaiseen ajatukseen, että käsitteet ja attribuutit ovat itsenäisiä olioita. Käsitteet sijaitsevat Popperin maailma 2:ssa, ja ne ovat myös kulttuurin mukana kehittyviä kollektiivisia entiteettejä Popperin maailma 3:ssa (Niiniluoto 1990). Attribuutit ovat fysikaalisten tai idealisoitujen olioiden ominaisuuksia ja suhteita Popperin maailma 1:ssä. Merkkien tulkinta toimii linkkinä siten, että merkin tarkoittama objekti tulee ymmärretyksi käsitteiden välityksellä. Tämän tutkimuksen näkökulmasta tulittiin siihen tulokseen, että käsite on luonteeltaan kollektiivinen entiteetti, mutta yksilön kannalta se on tietosuutta attribuutista.

4.4.3 (C) Leinonen, J. & Korhonen, A. (2005). Miten arvioida matematiikan opiskelua ja ymmärtämistä. *Kasvatus* 36 (1), 33-42.

Tämä artikkeli on tehty yhteistyössä KTL Anne Korhosen kanssa. Tutkimuksen tarkoituksena oli kehittää arviointimenetelmä, jonka avulla saataisiin matematiikan kurssin aikana reaaliaikaista tietoa opiskelijoiden matemaattisen ajattelun ja ymmärtämisen kehittymisestä. Tutkimus perustui opetuskokeilun aikana kerättyyn empiiriseen aineistoon. Aineiston analyysi ja päätelmät tehtiin diskurssianalyysillä, joka on sosiaalipsykologiaan kuuluva tutkimusmenetelmä, ja joka nojaa sosiaaliseen konstruktioon (Gergen 1994). Siinä yksilötietoisuuden tilalle tulee diskurssi, joka on sosiaalisen vuorovaikutuksen ja kielenkäytön ilmenemismuoto (Gergen emt.; Sfard 2008). Menetelmän käytössä Anne Korhosella oli päävastuu.

Lapin yliopistossa luokanopettajakoulutuksessa vuonna 2001 kehitin ja kokeilin oppimisen arviointimenetelmää matematiikan peruskurssilla, jonka pituus oli viisi viikkoa. Viikko-ohjelmaan kuului kaksoistunti sekä luentoa että pienryhmäopetusta. Kurssilla olivat mukana kaikki 64 toisen vuosikurssin opiskelijaa, joilta veloitettiin aktiivista osallistumista pienryhmäohjaukseen. Heistä 17 halusi suorittaa kyseisen matematiikan kurssin kirjoittamalla opintopäiväkirjaa. Loput opiskelijoista suorittivat

kurssinsa perinteisesti loppupentillä kurssin päätteeksi. Oppimispäiväkirjojen analyysi ja päätelmät tehtiin diskurssianalyysillä.

Päiväkirjaa kirjoitettiin kurssin etenemisen mukaan ja parin sivun mittainen ote tuli palauttaa opettajalle viikoittain. Kirjoittajia ohjeistettiin syventymään kurssin aiheisiin sekä kirjoittamaan kurssilla virinneistä ajatuksista ja pohdinnoista. Kurssin pitäjänä annoin viikoittain suullisen palautteen kullekin kirjoittajalle sekä vihjeitä seuraavaa selontekoa varten. Puutteellisia esityksiä tuli täydentää ja virheellisyksiä korjata mahdollisimman pian.

Päiväkirjatekstiä kertyi melkein 200 sivua. Tutkijat lukivat opiskelijoiden kirjoitelmat huolella moneen kertaan ja neuvottelivat merkityssysteemien identifioinnista, kunnes pääsivät yksimielisyyteen. Anne Korhonen vastasi pääosin tutkimusmenetelmän käytöstä, kun taas itse huolehdin opetuksesta, kirjoittamisen ohjauksesta ja palautteen antamisesta.

Aineistosta löytyi kaksi diskurssia, joille annettiin luonteensa mukaiset nimet: mekaanisten muistisääntöjen diskurssi ja heuristisen tunnustelun diskurssi. Edellisessä tapauksessa merkitykset olivat symbolien praktisia käyttösääntöjä. Heuristisen tunnustelun diskursseille oli tunnusomaista merkitysten tuottaminen luovana prosessina.

Aineistosta löytyi myös esimerkki ristiriitatilanteesta, jossa opiskelija laittoi oman ajattelutaitonsa koetukselle. Diskurssien välinen ristiriita johti ajatuskokeisiin ja ratkaisuvaihtoehtojen koetteluun. Virheellisten tulkintojen löytäminen osoitti ristiriidan näennäiseksi, jonka opiskelija pani tyydytyksellä merkille. Tässä yhteydessä artikkelisamme on nostettu esille mallien käytön ongelma matematiikan opetuksessa. Konkreettisiin malleihin sitoutuminen saattaa olla jopa haitaksi, jos ne saavat dominoivan aseman argumentaatioissa.

Metadiskurssien maailma tarjosi joukon vaihtoehtoisia näkökulmia, joiden käyttökelpoisuutta voitiin arvioida tilanteen mukaan. Tarjolla oleva diskurssien valikoima on ehto reflektiiviselle ajattelulle, mutta myös aidolle pedagogiselle dialogialle, kuten Artikkelissa C todetaan. Kriittisen ajattelun metadiskurssi voi suuntautua muun muassa oppikurssin sisältöön, toteuttamistapaan tai käyttökelpoisuuteen, josta on annettu esimerkki artikkelissa.

Yhteenvedossa tarkasteltiin diskurssianalyysin käyttömahdollisuuksia matematiikan opetuksessa. Artikkelin mukaan rinnakkaiset, ristiriitaiset tai vaihtoehtoiset diskurssit ja erilaiset näkökulmat tarjoavat keinoja arvioida opiskelijan matemaattisen ajattelun kehittymistä ja ymmärtämistä. Lisäksi osoitettiin, kuinka vuorovaikutustapahtumien analyysillä päästään käsiksi opiskelutapoihin ja -strategioihin. Lopuksi artikkelissa pääteltiin, että diskurssianalyysi soveltuu tutkijalle, opettajille ja myös omaa työtään tutkivalle opettajalle.

4.4.4 (D) Leinonen, J. (2011). *Understanding and Mathematical Problem Solving. Teoksessa K. Szücs & B. Zimmermann (eds.), Proceedings of the ProMath meeting in Jena 2010, 85-94. University of Jena.*

Tämä artikkeli perustuu ProMath-konferenssissa pitämäni esitelmään. Se on julkaistu esitelmistä tehdyssä kirjassa. Kyseessä oli teoreettinen tutkimus, jonka tehtävänä oli sel-

vittää ymmärtämisen ja ongelmanratkaisun roolia matematiikan oppimisessa. Tutkimusaineistona olivat opetussuunnitelmat, tehtävääluetta käsittelevät referoidut julkaisut ja omat aiemmin kirjoitetut artikkelit. Tutkimusmenetelmänä oli systemaattinen analyysi.

Aiemmissa artikkeleissa A ja B oli käynyt ilmi, että sanalla 'ymmärtäminen' on monia merkityksiä ja tilanne vaikutti sekavalta. Tarkempi analyysi osoitti, että joillekin kyseisen sanan merkityksille voidaan löytää luonteva asema Ausubelin (1968) mielekkään oppimisen teoriassa. Tässä työssä kehitetty malli sisältää neljä erilaista ymmärtämisen muotoa, jotka erotetaan indekseillä (Y1-Y4). Ensimmäinen on kesto- tai muistintila ja jälkimmäiset ovat työmuistintilaprosesseja. Ymmärtämisen muodot saavat mallissa luonteensa mukaisen tehtävän seuraavasti:

Ymmärtäminen Y1 (konseptuaalinen tieto):

Ymmärtäminen Y1 on kesto- tai muistintilasta taltioitunutta konseptuaalista tietoa, jossa propositionaalinen ja proseptuaalinen tieto kietoutuvat toisiinsa. Tieto on järjestäytyneenä semanttiseksi verkoksi, jossa on linkkejä ja solmuja. Käsite, tosiasia tai proseduri on ymmärretty Y1, jos se on osa verkkoa. Ymmärtämisen Y1 aste riippuu linkkien lukumäärästä ja vahvuudesta (Hiebert & Lefevre 1986). Verkon tehtävä on tarjota näkökulmia, viitekehyksiä ja menetelmätietoa informaation käsittelyyn.

Ymmärtäminen Y1 on jatkuvan muutoksen alainen oppimisen ja unohtamisen vuoksi. Ei ainoastaan jonkin aihealueen tietomäärä laajene, vaan epäkoherentit verkon osat voivat jäsentyä koherenteiksi. Verkon jokin osa-alue saattaa muuttua radikaalisti, kun esimerkiksi empiiriset perustelut korvataan aksiomaattisilla. Ääritapauksissa puhutaan kuhnilaisesta paradigman muutoksesta.

Ymmärtäminen Y2 (tulkinta):

Ymmärtäminen Y2 kohdistuu tekstiin, ja tarkoituksena on "saada käsiin" sen sisältö Y1:n tarjoamassa viitekehyyksessä. Referentiaaliset merkitykset ovat kielellisten ilmausten viitteellisiä kohteita ja niihin liittyviä attribuutteja: ekstensioita ja intensioita. Kontekstuaalisella merkityksellä tarkoitetaan idean tai merkin asemaa kyseisessä järjestelmässä. Merkityksen muodostaminen lauseelle tapahtuu Wittgensteinin (1971/1922) kuvateoriaa soveltaen siten, että yksilö projisoi ajatussisältönsä relevanttiin kohteeseen. Väärinymmärtämisessä tulkinta ei ole tavoittanut relevanttia tarkoitetta tai kohteelle ei ole omistettu asianmukaista ajatussisältöä.

Ymmärtäminen Y3 (synteesi):

Ymmärtäminen Y3 sovittaa tulkitun merkityssisällön oppijan omaan tietojärjestelmään Y1. Sovittaminen suoritetaan seuraavien vaiheiden kautta:

1. Erotetaan oleelliset informaation elementit epäoleellisista. Saatua informaatio tiivistetään ja yleistetään yksilön tietojärjestelmän mukaiseksi ts. tehdään synteesi.
2. Saadulle informaatiolle tehdään yksilön aiempien esitysten mukainen kuvallinen ja symbolinen esitys.
3. Saatua representaatio integroidaan tietojärjestelmään Y1.

Artikkelissa C korostetaan, että kehällä 1 ei tuoteta uutta tietoa, vaan se on tekstin tulkinta-, käänös- ja integrointipahtuma (Marzano 2001).

Ymmärtäminen Y4 (akkommodaatio):

Ymmärtäminen Y4 organisoii uudelleen kesto- ja prosessimallin tietojärjestelmää, jonka seurauksena saatua informaatiota voidaan tulkita uudessa valossa. Esimerkiksi ongelmanratkaisutehtävä voi aiheuttaa tietorakenteessa jännitteen, joka käynnistää rakennemuutoksen ja tuottaa uuden ympäristön ongelmanratkaisua varten. Maailmankuvan tai matematiikkakuvan muutos voi olla enemmän tai vähemmän radikaali. Muutosten alaisena voivat olla tiedon lisäksi myös uskomukset, asenteet tai affektiot. Esimerkiksi tehtävän kannalta relevantit uskomukset edistävät matematiikan oppimista, kun taas irrelevantit vaikeuttavat sitä.

Ymmärtäminen ja ongelmanratkaisu:

Toinen osa artikkelista käsittelee ymmärtämisen tehtävää ongelmanratkaisussa. Ymmärtäminen₁ tarjoaa resurssit ongelmanratkaisuun ja ongelmanratkaisu puolestaan tuottaa uusia tietorakenteita. Artikkelin lopussa todetaan, että matematiikka voidaan nähdä järjestelmänä, johon kuuluu kaksi toisiaan täydentävää osa-aluetta: ymmärtäminen ja päättely (Harel 2009). Oppiminen etenee osien välisenä komplementaarisen prosessinä esimerkiksi Sfardin (1991) reifikaatioteorian tapaan.

4.4.5 (E) Leinonen, J. & Pehkonen, E. (2011). *Teacher students' improvements in calculation skills and understanding in the case of division. Teoksessa B. Ubutz (ed.), Developing Mathematics Thinking. Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) July 10-15, 2011 in Ankara, (vol. 3, pp. 129-136). Ankara: Middle East Technical University.*

Tämä artikkeli on tehty yhteistyössä prof. Erkki Pehkonen kanssa. Se on esitelty kansainvälisessä PME-konferenssissa Ankarassa vuonna 2011 ja julkaistu artikkeleista tehdyssä kirjassa. Artikkelin tarkoitus oli selvittää, kuinka laskutaitoja ja ymmärtämistä voidaan kehittää oppilasta aktivoivilla kysymyksillä. Tutkimusaineisto on kerätty Lapin yliopiston luokanopettajakoulutuksen matematiikan peruskurssin yhteydessä. Aineiston analyysi ja raportointi on tehty molempien tutkijoiden yhteistyönä. Lisäksi ulkopuolinen matematiikan opettaja osallistui testien arviointiin. Tutkimusmenetelmänä oli sekamenetelmä (mixed methods), jossa kerättyä empiiristä aineistoa analysoitiin kvantitatiivisilla ja kvalitatiivisilla menetelmillä.

Luokanopettajaopiskelijoilla oli vuosina 2007-2010 kaksi vaihtoehtoa suorittaa matematiikan peruskurssi: kertaustentti kurssin jälkeen tai pohdiskelujen selonteokojen kirjoittaminen kurssin aiheista. Kurssin pituus oli kuusi viikkoa. Viikoittaiseen ohjelmaan kuului 90 minuuttia kestävä luento ja saman mittainen pienryhmäohjaus, joihin edellytettiin aktiivista osallistumista. Opetuksen aiheita olivat muun muassa peruslaskutoimitukset, prosenttilasku ja lukujärjestelmät. Laskutaitoja mitattiin alku- ja loppustestillä. Tentti- ja selontekoryhmän laskutaitoja verrattiin toisiinsa eri tehtävien

osalta. Testeihin osallistui yhteensä 220 opiskelijaa, joista 57 oli selonteon kirjoittajia ja loput 163 suoritti kurssin perinteisellä tentillä kurssin päätyttyä.

Alku- ja loppupistekin ensimmäinen tehtävä oli kokonaislukujen jakolasku, toinen oli supistamistehtävä ja kolmas desimaalilukujen jakolasku. Tehtävät arvioitiin kolmipor- taisesti niin, että 0 pistettä annettiin täysin väärästä ja 2 pistettä tuli täysin oikeasta suorituksesta. Osittain oikean suorituksen arvo oli 1 piste. Molempien ryhmien osalta laskettiin alku- ja loppupistemääristä keskiarvojen ero ja erojen merkitsevyyttä tes- tattiin t-testillä. Selonteosta jäljitettiin kvalitatiivisesti erilaisia ajattelutapoja, joiden perusteella voitiin arvioida ymmärtämistä.

Selonteon kirjoittajat saivat raporteistaan viikoittain palautetta ja lisäohjeita seuraavaa kirjoitusta varten. Ohjeistus ja keskustelut käytiin pääasiassa sähköpostin välityk- sellä. Kaikilla opiskelijoilla oli tietokone yliopiston puolesta. Kurssin alussa annettiin kirjoittajille rohkaisevia yleisohjeita pohdiskeluun kuten:

Tärkeintä on ihmettely. Mikään ei ole automaattisesti selvää. Ei ole huonoa miksi -kysymystä, vain vastaukset voivat olla huonoja. Etsi laskusäännöille perusteluja ja kirjoita niistä.

Jakolaskun toimintaperiaatteen keksimiseksi annettiin suuntaavia kysymyksiä:

Miksi jakolaskun tulosta on hyvä arvioida ennen laskusuoritusta? Miksi jakolasku aloitetaan aina vasemmalta? Mieti eri laskuvaiheiden merkitystä? Miten jakolas- kun suoritus eroaa, kun se tehdään eri lukujärjestelmissä?

Alkutestissä ryhmien pistemäärissä oli vain muutaman prosentin ero. Kokonaislukujen jakolaskuissa onnistuttiin parhaiten, mutta desimaalilukujen jakolaskussa pistekeskia- rvo jäi alle puoleen maksimista. Supistamistehtävä sijoittui näiden väliin.

Artikkelissa E testin tehtävä oli paljastaa eri tehtävätyyppien avulla sellaisia tekijöitä, joihin puuttumalla voitaisiin edistää laskutaitoa. Pieni korrelaatio ($r = 0.39$) testissä osoitti, että alkupisteillä ei juuri ollut ennustearvoa loppupisteisiin. Pieni pysyvyysker- roin ($r_{aa} = 0.48$) alkupisteissä kielii siitä, että testi antaa tilastollisesti lähes sattumanva- raisia arvoja. Tämä saattoi olla merkinä siitä, että laskusuorituksia ohjasi joukko erillisiä tehtäväkohtaisia toimintakaavioita. Tässä tutkimuksessa haluttiin kokeilla, edistäisikö toimintaperiaatteisiin ja yleistyksiin panostaminen myös laskutaitoja. Kurssin jälkeen selontekoryhmän testipistemäärät nousivat eniten kaikissa tehtävissä, mutta t-testin mukaan vain desimaalilukujen osalta keskiarvojen ero oli merkittävä (tasolla .05; $t = 2.05$; $df = 218$). Desimaalilukujen jakolaskussa oli puutteita esimerkiksi laventamisessa. Laventamisessa osoittaja ja nimittäjä voitiin kertoa eri luvulla niin, että molemmista saatiin kokonaisluku. Aivan kaikki eivät hallinneet kertotaulua. Yksityiskohtaisempaa tietoa tehtävien ja laskutapojen ymmärtämisestä saatiin selontekoryhmän raporteista.

Selontekojen kirjoittaminen motivoi joitakin opiskelijoita, koska he pelkäsivät tenttiä tai he halusivat vaihtelua opiskelutapoihinsa. Aluksi kirjoituksissa muisteltiin pelonsekaisesti kouluajan matematiikkaa ja kovaa kiirettä. Lopulta useimmat opiskeli-

jat kirjoittivat olleensa tyytyväisiä, kun olivat saaneet miettiä ja kirjoittaa selontekoja ilman tenttipaineita. Muutamat opiskelijat kirjoittivat tyytyväisinä saavutuksistaan, kun olivat oivaltaneet yksittäisen periaatteen kuten esimerkiksi laventamisen idean.

Suurin osa selontekoryhmän ajattelutavoista voitiin sijoittaa kahteen David Tallin (2004) matematiikan maailmoista: käsitteellis-esineellinen maailma ja symbolis-proseptuaalinen maailma. Kummassakin maailmassa ajattelu perustuu sille ominaiseen ymmärtämisen tapaan.

Ero kokonaislukujen ja desimaalilukujen laskutaidoissa voidaan selittää muistikapasiteetin rajoituksilla. Kokonaislukujen jakolaskut on helppo tehdä mekaanisten sääntöjen varassa, ja melkein kaikki opiskelijat pystyivät virheettömään suoritukseen tässä osiossa. Toisin oli desimaalilukulaskujen kanssa, jossa laventaminen oli lisävaiheena. Vaikka testin mukaan supistaminen onnistui kohtuullisesti, desimaalilukujen jakolaskussa tuli jo laventamisen kanssa vaikeuksia. Tässä osiossa vain vajaat puolet opiskelijoista pystyi virheettömään alkutestin suoritukseen.

Lopuksi artikkelissa todetaan, että laskutoimitusten periaatteisiin syventyminen lisäsi laskutaitoja. Kysymysten pohdiskelu selontekoryhmässä näyttää edistävän matematiikan oppimista, koska se auttaa periaatteiden ymmärtämistä ja antaa sitä kautta varmuutta laskutaitoihin.

5 Tutkimustulokset ja yhteenveto

5.1 Tutkimustulokset

Tämän työn kannalta keskeisiksi nousivat ymmärtämisen kolme näkökulmaa: prosessin, kyvyn ja tiedon näkökulmat. Ymmärtäminen voidaan nähdä prosessina, joka liittyy tiettyyn henkilöön, sisältöön ja tilanteeseen (Hiebert & Carpenter 1992). Kysymyksessä on tilannekohtainen prosessi, jossa yksilö tuntee, ajattelee ja toimii älykkäästi (Brownell & Sims 1972/1946). Oppitunnilla tämä merkitsee sitä, että oppija tulkitsee saamansa informaation ja työstää sitä kognitiivisissa toiminnoissaan. Ymmärtämistä voidaan pitää myös kyynä suorittaa ajattelua vaativia tehtäviä kuten päättely, perustelu, selittäminen, yleistäminen, abstrahointi tai asian esittäminen toisella tavalla. Bereiter (2002, 99-100) näkee ymmärtämisen yksilön ja kohteen välisenä suhteena. Sitä voidaan tutkia tekemisen ja sen vaikutusten perusteella, kun oppija suorittaa esimerkiksi kääntämisen, tulkinnan tai ekstrapolaation (Bloom ym. 1971). Tieto ja ymmärtäminen liittyvät toisiinsa siten, että käsite, fakta ja proseduuri on ymmärretty, jos ne ovat osa yksilön tietoverkkoa (Hiebert & Carpenter 1992). Oppimisen analyyseissa edellä mainittuja näkökulmia voidaan pitää erillisinä, mutta käytännön oppimistilanteissa ne täydentävät toisiaan.

Ensimmäinen kysymys lähtee tiedon näkökulmasta, jossa selvitetään käsitteen luonnetta ja asemaa ymmärtämisessä. Ymmärtäminen nähdään tilana ja valmiutena tehdä jotakin. Sillä tarkoitetaan *käsitteellistä* tiedon hallintaa (Hiebert & Carpenter 1993). Toisaalta ymmärtäminen voi kohdistua johonkin objektiin, jolloin tarvitaan *käsitteellisiä* välineitä asian haltuun ottamiseen eli ymmärtämiseen. Tämä väline ei kuitenkaan ole tavanomainen esine kuten esimerkiksi vasara, vaan *käsite* kehittyy ja muuttuu sen käyttämisen yhteydessä. Näin käsite ja ymmärtäminen ovat erottamaton pari. Toisessa kysymyksessä selvitetään hankitun tiedon hyväksymistä ja kytkemistä oppijan omaan tietoverkkoon. Tämä edellyttää itsenäistä arviointia, onko vastaanotetulla informaatiolla oikeutettua asemaa oppijan omassa tietojärjestelmässä. Oikeutus on normatiivinen tai arvottava käsite. Sen perusteella arvioimme, mitä meidän tulisi uskoa tai olla uskomatta (Lammenranta 1993, 129; Leinonen 2018). Perustelut kytkävät tietoverkon osia toisiinsa, ja antavat valmiuden vastata kysymykseen *miksi* jotkut asiat liittyvät toisiinsa tai miksi eivät liity tai *miksi* ne ovat toistensa seurauksia. Tästä syystä ymmärtämiseen tähtäävässä oppimisessa ohjaajan tehtävä on haastaa oppija perusteltujen väitteiden etsimiseen ja tuottamiseen osuvilla *kysymyksillä* (Niiniluoto 1988). Tämän työn empiirisissä osioissa (Artikkelit C ja E) on kysymyksillä haastettu opiskelijoita pohtimaan perusteluja väitteille, mikä tuottikin rohkaisevia tuloksia.

Vaikka sana 'ymmärtäminen' on monimerkityksinen, sen käytössä on harvoin arkitilanteissa ongelmia. Opetustilanteissa asia on toisin, ja monimerkityksisyys voi johtaa

väärinkäsityksiin. Väärinkäsitysten välttämiseksi ja pedagogisten keinojen lisäämiseksi on 'ymmärtämisen' merkitysvalikoimaa tutkittu tässä työssä tarkemmin. Uuden mallin rakentamisen toinen vaihe on ymmärtämisen eri muotojen sovittaminen mielekkään oppimisen ympäristöön. Sana "mielekäs" viittaa joukkoon merkityksiä, jotka ovat opetuksen kannalta huomion arvoisia (ks. luku 3.2.1). Referentiaalinen merkitys viittaa olioön, jota sillä tarkoitetaan ja ideationaalinen merkitys siihen, mitä kohteesta väitetään. Holistinen merkitys asemoi väitteen ympäristöönsä, ja affektioiden merkitys liittyy henkilön arvomaailmaan. Viimemainittu on tässä työssä vain kätketysti mukana. Käsillä olevista ymmärtämisen ja merkityksen komplementaarista aineksista tehtiin synteesi, joka johti mielekkään oppimisen malliin. Malli on tämän tutkimuksen keskeinen tulos, ja sitä tarkastellaan kolmannessa kysymyksessä. Siinä ymmärtämisen eri muodot saavat luonteensa mukaisia erityistehtäviä, kun ymmärtämisen luonnetta on alustavasi selvitetty kahdessa ensimmäisessä tutkimuskysymyksessä.

Mallin rakentamisessa on saatu aineksia aiemmin esitetyistä oppimismalleista, joita on tarkemmin selvitetty luvuissa 3.2.3 ja 3.3. Sfardin (1991) reifikaatioteoria ja Harel- lin (2009) komplementaariset prosessit olivat taustalla, kun uutta mallia rakennettiin toiminnalliselle pohjalle. Kilpatrickin ym. (2000) punosmalli ja Singaporen Penta- gonmalli (Kilpatrick 2009) asemoivat luontevasti ymmärtämisen ja käsitteen muihin oppimisen osatekijöihin. Marzanon (2001) dynaaminen malli taustoitti työtä, kun se antoi kokonaiskuvan oppijasta itsenäisenä oppimisen agenttina. Tässä mallissa oppija valitsee tehtävänsä, päättää tavoitteistaan sekä suunnittelee, arvioi ja ohjaa tiedollisia toimintojaan.

5.1.1 Mikä on käsitteiden asema ymmärtämisessä?

Ideoita on pidetty ajatuksen peruselementteinä ainakin antiikin ajoista lähtien. Platon piti niitä ylyksilöllisinä olioina, joihin saadaan kontakti ajattelemalla ja harjoitusten avulla. Skolastikot ajattelivat, että käsitteet olisivat ulkomaailman olioista lähtevien "spesiesten" kopioita ihmismielessä (Hobbes 1962/1655). Uuden ajan empiristeille ideat olivat aistimuksista peräisin olevia ajatusolioita, jotka saatiin välittömien ja väli- neettömien kokemusten tuloksena (Tuomela 1983, 26). Niitä on pidetty vaikeaselkoi- sina ja epäselvinä ainakin episteeminen - ei-episteeminen jaottelussa (Aaltola 1989, 22; Tuomela 1983, 26). Tähän sekaannukseen Kant (1997/1783) tarjosi komplementaarista ratkaisua, jonka mukaan käsitteiden ja aistimusten kombinaatioina kokemukset ovat ajattelun peruselementtejä. Hänen mukaansa käsitteet antavat havainnoille muodon ja kokemukset ajatuksille sisällön. Ymmärrys (Vernunft) tekee kategorioillaan kokemuk- sista synteesejä (Kant. emt). Negaation kautta käsitteiden tehtävät voidaan ilmaista seuraavasti: Havainnot ilman käsitteitä ovat sokeita, ja ajatukset ilman havaintoja ovat tyhjiä. Monissa kielissä suomen tapaan sana 'käsite' viittaa metaforisesti konkreettiseen otteeseen kuten saksan 'Begriff' tai englannin 'concept'. Sanaa 'idea' käytetään edelleen melko yleisesti ja näyttää, että sillä tarkoitetaan käsitettä tai ajatussisältöä.

Kognitiotieteissä käsitteitä pidetään luokan elementtien yhteisinä piirrekimppuina. Tosin perheyhtäläisille käsitteille ei kaikille löydy yhteisiä piirteitä, kuten esimerkiksi pelin käsitteelle (Wittgenstein 1981/1953). Termien intensioilla tarkoitetaan luokit-

teluperusteita, jotka määrittävät luokkakäsenyyden. Käsitteestä voidaan käyttää myös nimityksiä yleistys, yleiskäsite ja universaali (Niiniluoto 84, 123). Käsitteiden kompositionaalisuudesta seuraa, että yhteisten tekijöiden välityksellä voidaan muodostaa käsite- ja tietojärjestelmiä. On hyvä tehdä ero käsitteiden ja käsitysten välille. Jälkimmäiset ovat proposionaalisia, mutta edelliset eivät. Käsitykset ovat tietoisia uskomuksia ja niitä voidaan tarvittaessa perustella (Pehkonen 2003). Uskomukset poikkeavat käsityksistä siten, että niille ei aina pystytä antamaan objektiivisesti hyväksyttäviä perusteluita (Pehkonen 1999, 121). Totuus ja oikeutettu perustelu tekevät uskomuksesta tietoa. Oikeutuksen luonnetta käsitellään lisää luvun 5.1.2 yhteydessä.

Arkikeskustelussa voidaan vaatia, että puhuttaisiin asioista niiden ”oikeilla” nimillä. Taustalla on ajatus, että meillä olisi suora kontakti objektiiviseen todellisuuteen ja sen attribuutteihin. Käsitteet ovat tässä tapauksessa attribuuttien mentaalisia kopioita. Tämä vaikuttaa epäuskottavalta, koska sama kohde voidaan usein jäsentää monella tavalla. Artikkelissa B päädyttiin realistiseen näkemykseen, jonka mukaan käsitteiden tehtävä on saada ote todellisuuden asianteiloista sekä niiden ominaisuuksista ja suhteista. Kysymys on yksilön sisäistämistä käsitteistä, joilla päästään kiinni asioihin ja ymmärrämme tai näemme ne jonakin (a way of seeing something), kuten Marton ym. (1993) asian ilmaisee. Käsitteiden hallinta avaa mutta myös rajoittaa sitä, kuinka voimme hahmottaa ympäristöä ja toimia tilanteissa järkevästi. Käsitteet yleistyksinä tai periaatteina saattavat sisältää suuren määrän informaatiota kuten esimerkiksi Pythagoraan väittämä tai Bernoullin periaate. Edellisen avulla kirvesmies saa rakennuksen nurkat suoriksi ja jälkimmäistä tarvitaan kulkuneuvojen muotoilussa. Käsitteellinen ymmärtäminen on toiminnallisen ja systemaattisen tiedon hallintaa, joka siirtovaikutuksensa vuoksi tarjoaa valmiuksia toimia älykkäästi ekstensionsa sallimissa rajoissa (Kilpatrick ym. 2001; Hiebert & Carpenter 1992).

Vaikka olemme syntyneet yhteisöön, jossa julkisyhteisöllinen kieli käsitteinen on valmiina (Aaltola 1989, 12), emme voi ottaa käsitettä käyttöön valmiina työkaluna kuten menettelemme esimerkiksi vasaran kanssa. Omaksumme ja kehitämme käsitteitä pintapuolisesta syvällisempään samalla, kun käytämme niitä (Sfard 2000). Kommunikoinnissa käsite ilmaistaan ulkoisilla merkeillä, representaatioilla. Representaatiolla on myös sisäinen aspekti kuten mielikuva tai lause. Sisäinen ja ulkoinen aspekti eivät ole toistensa kopioita, vaan voimme manipuloida sujuvasti ulkoisia representaatioita, vaikka meillä ei olisikaan niihin kuuluva käsite hallussa. Tällöin on kysymyksessä non-referentiaalinen ajattelu (Harel 2009), johon eräs opiskelija Artikkelissa C:ssä turvautui paremman puutteessa:

Minä taidan tyytyä siihen, että viisaat ovat päättäneet, että jos eksponentti on nolla niin vastaus on aina 1. (Ote 4).

Tällainen päättely johtaa rutiinioppimiseen, koska mielekäs käsitteellinen kytkeä oppijan tietojärjestelmään puuttuu. Toisaalta voi käydä niinkin, että meillä on jokin yleistys tai periaate hallussa, mutta emme pysty antamaan sille verbaalista esitystä (Kilpatrick ym. 2001, 118). Evaluaation kannalta tämä merkitsee sitä, että ymmärtämistä

ei aina voi arvioida verbaalisilla esityksillä, vaikka käytännön toiminta osoittaisikin käsitteen hallinnan (Wittgenstein 1953, 106).

Vaikka käsitteiden rakenneteoriat ovat kiistanalaisia (ks. esim. Salo 1999), oletetaan tässä työssä, että käsitteillä on määritelmän tai prototyypin mukainen kompositionaalinen rakenne. Siitä seuraa, että käsitteet voivat osiensa välityksellä muodostaa käsitejärjestelmiä. Systemit voivat olla hierarkkisia tai levittäytyä kytkentöjensä välityksellä lateraaliseksi verkoiksi (Haapasalo 2004, 50-83). Käsitteitä on tapana luokitella sen mukaan, millaisia elementtejä niiden alaan kuuluu. Matematiikassa operaatiot, objektit, ominaisuudet ja suhteet ovat pääasiallisia luokittelun kohteita. Matematiikan oppimisteorioissa on osoittautunut käyttökelpoiseksi näkemys, että käsite ajattelun yksikkönä olisi luokituslajien kombinaatio eli prosepti (Gray & Tall 1993). Ymmärtämisen taso riippuu tietoverkon kytkentöjen määrästä ja voimakkuudesta (Hiebert & Carpenter 1993). Hierarkkiset representaatiot tuottavat selittäviä kytkentöjä, kun taas assosiatiiviset tarjoavat edellisten lisäksi myös analogisia linkkejä (ks. Hähkiöniemi 2006, 38-41).

Tämän työn empiirisissä osioissa kuvallinen representaatio edustaa Tallin (2004) luokituksessa havainnollis-käsitteellistä maailmaa ja formaalinen representaatio symbolis-proseptuulista maailmaa. Nämä voivat olla vuorovaikutuksessa siten, että toinen esitystapa selittää toista, jolloin kysymyksessä representaatioiden välinen vahva yhteys (Hähkiöniemi 2005, 40). Artikkelin C:ssä opiskelija tarjosi tällaisen linkin rakentamisesta esimerkin, kun hän pyrki löytämään ositusjaolle sopivan konkreettisen tulkinnan tuntemansa laskusäännön nojalla:

Esimerkiksi, jos 3 jaetaan 0:lla, niin automaattisesti ajattelin, että sehän kolme. Eli vaikka kolme karkkia jaetaan 0 lapsen kesken, niin olin ajatellut, että se on 3, kun sitä ei jaeta kenellekään. ... Testasin asiaa tarkemmin miettimällä lukujen kautta. Jos ajattelen, että 3 jaettuna 0:lla on kolme, niin laskusäännön mukaanhan silloin täytyisi nolla kertaa kolme olla nolla ja sitähan se missään nimessä ei ole. (Ote 6).

Opiskelija luottaa tässä tapauksessa muistamaansa laskusääntöön, joka ohjaa hänen päättelyään representaatiotyyppien välillä. Perustelun tehtävä on antaa haltijalleen oikeutus uskoa, että väite on tosi ja nostaa ymmärtämisen tasoa. Tiedollista oikeutusta käsitellään tarkemmin seuraavassa luvussa.

5.1.2 Mikä on kysymysten tehtävä mielekkäässä oppimisessa?

Kysely on yksi tunnetuimmista tiedonhankinnan keinoista. Ongelmatilanteiden ratkaisemisessa pätee kansanomainen neuvo: kysyvä ei tieltä eksy. Ateenan kaduilla Sokrates ohjasi tai pakotti ihmisiä kysymyksillään ajattelemaan ja miettimään perusteluja uskomuksilleen (Platon 1999). Uuden ajan alussa aktiivista tiedonhankintaa korostavat luonnontieteilijät tekivät kysymyksiä luonnolle selvittääkseen sen lainalaisuuksia. Kysymysten merkityksestä tarjoaa esimerkin vuoden 2016 taloustieteen nobelisti Holmströmin ajattelutapa, jota Sixten Korkman (2016) kuvaa seuraavasti: ”... hän osaa tehdä hämmentäviä kysymyksiä ja keskustella niistä innovatiivisesti...”.

Sanat 'ymmärtää' ja 'tietää' eivät ole vain mentaalisia tapahtumia kuvaavia verbejä, vaan ne ovat myös tekoja, jotka asemoivat sanojan tiettyyn erityisasemaan kuulijakunnassa (Austin 1979). Hän sitoutuu olemaan sanojensa takana ja on valmis tarvittaessa perustelemaan oikeutettuna pitämänsä väitteen. Oikeutus on normatiivinen tiedon määre, sillä on keltotonta uskoa väitteitä, joilla ei ole hyväksyttäviä perusteluja. Vahvan tiedon käsitteen miksi-kysymykset fokuoivat huomionme juuri perusteluihin, jotka pyrkivät vakuuttamaan meidät niiden oikeutuksesta (Niiniluoto 1988, 339). Arvioimme tiedollisin kriteerein, mitä meidän tulisi uskoa tai olla uskomatta (Lammenranta 1993, 129). Kriteerit riippuvat siitä, missä ympäristöissä esitämme väitteitä: fysikaalisessa, laskulakien vai aksiomaattis-deduktiisessa maailmassa (Tall 2004). Kun perustelut on hyväksytty, informaatioelementit voidaan liittää tietojärjestelmään mielekkäästi, ja konseptuaalisen tiedon määritelmän mukaisesti uudet elementit tulevat ymmärretyiksi. (Tiedollisesta oikeutuksesta lisää luvussa 5.1.3.1)

Aktiiviseen tiedon käsitteeseen kuuluu kyky etsiä tietoa oikeista lähteistä ja kaivaa sitä esiin oikeilla kysymyksillä (Niiniluoto 1988, 334). Kysymyksiä voidaan esittää keskustelukumppaneille, heidän esityksilleen, teksteille ja myös itselle kuten Artikkelin C kirjoittaja teki:

Onkohan niin, että kirjaimia tulee lisää, kun järjestelmä kasvaa kymmenenjärjestelmän yli? (Ote 9)

Uteliaisuus, ihmettely, rohkeat ideat ja ongelmat ovat hyviä lähteitä inspiroiville kysymyksille, joiden hyödyntäminen opetuksessa edellyttää arviointia, suunnittelua ja määrätietoista valmistelua kuten ajatusten suuntaamista perusteluihin, ristiriitoihin ja taustoihin.

Ongelmanratkaisu on keskeinen keino ajattelutaitojen kehittämisessä, ja kysymykset ovat osa tätä prosessia (Ahtee ym. 2016). Ongelman ratkaisemisen ensimmäinen vaihe on selvittää tehtävän tavoite ja sen saavuttamisen ehdot. Näiden kautta ongelma hahmottuu ja tulee ymmärretyksi, jolloin sitä voidaan lähestyä kysymysten muodossa kuten "Miksi?", "Kuinka?" tai "Millä tavoin?". Kysymysten tehtävä on etsiä ratkaisun kannalta oleellisia tekijöitä ja ehtoja, joka edellyttää myös relevanttien taustatietojen hallintaa. Ongelmanratkaisun luonteeseen kuuluu, että tuttua tietoa käytetään uudella tavalla. Ratkaisuprosessi muokkaa ajattelutaitoja ja tietojärjestelmää, se on juuri opetus suunnitelman tavoitteen mukaista. (Aiheesta lisää luvussa 5.1.3).

Riippumatta siitä perustuuko opetusmenetelmä kysymyksiin vai ei, sillä tarkoitetaan tapaa, jolla opettajan ja opiskelijoiden välinen interaktio järjestetään. Pedagoginen interaktio ei viittaa yksilöiden väliseen vuorovaikutukseen newtonilaiseen tapaan, joka on symmetrinen, vaan osapuolten vastavuoroiisiin intentionaalisiin toimintoihin opetustilanteissa (Kansanen 2000, 38). Ihannemuoto interaktiossa on dialogi, koska se edellyttää molemminpuolista tavoitteellista sitoutumista vastavuoroiseen toimintaan (Burbules 1993). Aidossa dialogissa oppilaiden esittämällä kysymyksillä on evaluaation kannalta tärkeä tehtävä, koska ne heijastavat oppilaan ajattelutapaa, uskomuksia, näkemyksiä, käsityksiä, asenteita ja asioiden ymmärtämistä. Professori Kankaan (1975)

antama ohje olikin nuorille assistenteille haastava: *Vain vastaukset voivat olla huonoja, eivät kysymykset*. Opettajan tulee siis rohkaista oppilaitaan kysymään. Toisaalta opettaja pystyy omalla kysymysvalikoimallaan suuntaamaan oppilaidensa ajattelua, ohjaamaan heidän ratkaisutapojaan, puuttumaan virheelliseen päättelyyn ja syventämään konseptuaalista ymmärtämistä (Leinonen & Pehkonen 2011). Vastavuoroisuusperiaatteen mukaisesti oppilas voi interaktiossa saada asiantuntijätietoa ja ajattelutapoja opettajan kysymyksistä ja vastauksista, kuten oppipoikakoulutukseen kuuluukin.

Opetustapahtuman kysymykset voidaan jakaa karkeasti kahteen pääluokkaan: opettajan ja oppilaiden kysymykset. Koululuokissa oppilaiden esittämien kysymysten määrä vaihtelee luokittain, mutta keskimäärin se on noin 30 % kaikista kysymyksistä (Laine ym. 2014). Kysymyksille voidaan antaa tarkempia luokituksia aina tarkoituksiperien mukaan kuten esimerkiksi oppimista tukevat (Anghilleri 2006), oppimista ohjaavat kysymykset (ks. esim. Martino & Maher 1999; Sahin & Kulm 2006) tai syventävät, perusteluja vaativat ja ongelmaratkaisuun liittyviä kysymykset (Laine ym. 2014). Jos kysymykset halutaan esittää Bloomin taksonomian mukaisesti, ne voidaan jakaa pinta- ja syväsuuntautuneeseen tasoon. Edellinen koskee taksonomian kolmea alinta luokkaa, ja niiden tarkoitus on evaluoida muistamista, ymmärtämistä ja soveltamistaitoa. Syväsuuntautuneet kysymykset koskevat analysointia, ongelmanratkaisua, arviointia ja luomista.

Koska matematiikka edustaa epistemologisesti vahvaa tiedon lajia (Niiniluoto 1988, 339), ovat syväsuuntautunutta oppimista aktivoivat miksi-kysymykset ensiarvoisia ajattelutaitojen ja ymmärtämisen kannalta. Niiden tarkoitus on suunnata ajatuksia kuvailevista tiedoista tai faktoista perusteluihin, sekä tuottaa yleistyksiä ja periaatteita. Tällaiset kysymykset ovat kuitenkin tavallisessa luokkaopetuksessa luvattoman harvinaisia, toteaa Laine ym. (2014) tutkimuksissaan. Miksi-kysymyksiin vastaaminen edellyttää kuitenkin evidenssin ja hyvin muodostettujen argumenttien luonteen ymmärtämistä sekä taitoja perustelujen tekemiseen. Siitä huolimatta, että tällainen metatason tieto on välttämätön osa korkeamman tason ajattelua, se on oppikirjoissa jäänyt vähäiselle huomiolle (Linnankylä 1987; Resnick 1987; Ojala 1997; Mikkilä 1998). Ristiriita kurssin tavoitteen ja opiskelijan odotusten välillä voi liittyä metatason problematiikkaan, josta esimerkkinä Artikkelin C kirjoittaja:

Edelleen mieltäni vaivaa kysymys miksi tämä kurssi kulkee nimellä koulumatematiikka. ... Laskut, joita laskemme eivät mielestäni liippaa läheltäkään koulun matematiikan opetusta. (Ote 8)

Tällaisten kysymysten ratkaiseminen on tärkeä oppilaan motivaation kannalta, ja siihen voisi löytyä ratkaisu opiskelijan uskomusjärjestelmistä matematiikkaa ja sen oppimista kohtaan (Pehkonen & Törner 1966). Se ei kuitenkaan kuulu tämän tutkimuksen piiriin.

Syväsuuntautunut opiskelu ei edistä ainoastaan ymmärtämistä vaan myös laskutaitoja (Hiebert & Carpenter 1993; Kilpatrick ym. 2001). Ymmärtämisen lisäämiseen tähtäävät kysymykset suuntautuvat oppijan sisäiseen tietoverkkoon ja voivat johtaa

linkkien vahvistumiseen sekä niiden lukumäärän lisääntymiseen. Toiminnallisten pe-riatteiden ja yleistysten ymmärtäminen ei lisää ainoastaan laskutaitoa vaan vapauttaa oppijan epävarmuudesta, kuten seuraava ote (Leinonen & Pehkonen 2011) paljastaa:

Minulle on tullut selväksi, että jos jaetaan desimaaliluvulla, osoittaja ja nimittäjä on lavennettava kokonaisluvuiksi, ja että laskemisen jälkeen ei tarvitse enää muuttaa osamäärää. Kun tämän ymmärsin, sääntö näyttääkin itsestään selvältä.
(Julia)

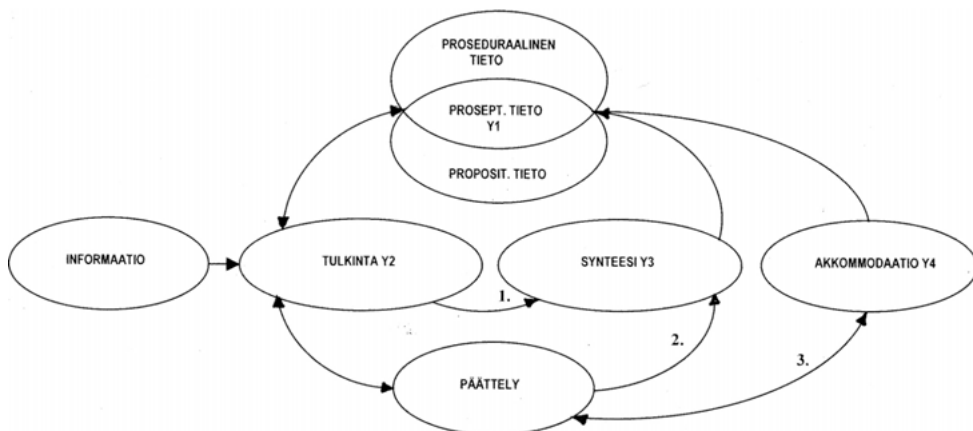
Yhteenvedona voidaan todeta, että kysymyksillä on useita tehtäviä opetuksessa kuten motivointi, ajattelun aktivointi, tarkkaavaisuuden suuntaaminen, opetuksen ja tutkimusalueen rajaaminen, oppimisprosessin seuranta ja ajatustaitojen arviointi. Kysymysten merkityksen puolesta puhuu myös väite, että tieto, ymmärtäminen ja havainnot ovat jo vastauksia kysymyksiin (Hintikka & Hintikka 1984; Burton 1992; Niiniluoto 1988; Kilpatrick ym. 2001; Rasinkangas 2010). Kysymyksiin perustuva opetustenetelmä näyttää tehostavan opiskelijan valmiuksien avautumista uusille tulkinnoille ja ongelmanratkaisulle, kuten nykyinen opetussuunnitelma edellyttää (Opetushallitus 2014, 374).

5.1.3 Mitä tehtäviä ymmärtämisellä on mielekkäässä oppimisessa?

Tässä työssä mielekkäällä oppimisella tarkoitetaan symbolisesti esitettyjen ideoiden työstämistä ja niiden integroimista yksilön aiemmin oppimiin tietojärjestelmiin (Ausubel 1968, 37-38). Tällöin oppimateriaalin potentiaalinen merkitys muuttuu psykologiseksi merkitykseksi yksilön kognitiivisessa struktuurissa. Psykologinen tai fenomenologinen merkitys on idiosynkraattinen kokemus, niin kuin myös kognitiivinen struktuuri. Sanomien ymmärtäminen kommunikaatiossa edellyttää, että osallistujilla on sama kulttuuritausta ja heidän kognitiiviset struktuurinsa muistuttavat toisiaan (Ausubel emt.).

Kun ymmärtämistä tarkastellaan kognitiivisesta näkökulmasta, ovat affektiot mukana kätkeytyneinä informaation prosessoinnissa. Artikkelin D tarkoituksena on eritellä sanan 'ymmärtäminen' käyttämistapoja, ja selvittää niiden tehtäviä mielekkään oppimisen ympäristössä. Sana 'mielekkyys' viittaa yksilön kannalta tiedon sisällölliseen (nonverbatim, substantial) aspektiin, kun vaihtoehtona on sananmukainen oppiminen eli rutiinioppiminen. Kuviossa 5 on esitetty ymmärtämisen eri muotojen tehtäviä mielekkäässä oppimisessa. Malli kuvaa oppimisprosessia tiedonrakentamisena. Kestomuistin konseptuaalinen ymmärtäminen (Y1) ja työmuistin aktiviteetit (Y2, Y3, Y4 ja päättely) ovat vuorovaikutuksessa keskenään. Mallin ensimmäinen sykli (Y1-Y2-Y3) vastaa Piagetin (1978) assimilaatiota, joka rikastaa konseptuaalista tietovarantoa oppijan hallussa olevan tiedon pohjalta. Jos annettu tehtävä ei ratkea välittömästi yksilön hallussa olevilla keinoilla, on kysymyksessä ongelmatehtävä, jota työestetään keskikehällä (2.). Tämän toimintoihin kuuluvat ongelmanratkaisun lisäksi päätöksenteko, tulkinta ja todistaminen. Jos kestmuistista ei löydy sopivaa viitekehystä ongelmatehtävän hahmottamiseen ja suorittamiseen, ongelma ei ratkea. Tällöin on tietojärjestelmässä

Y1 tehtävä rakenteellisia muutoksia, jotka suoritetaan moduulissa Y4. Tulos taltioidaan kestonmuistiin. Ratkaisua voi testata kehällä 2.



Kuvio 5. Ymmärtämisen muodot mielekkään oppimisen mallissa.

5.1.3.1 Mikä on käsitteellisen tiedon (Y1) asema mielekkään oppimisen mallissa?

Brownell luonnehtii ymmärtämistä tai pikemminkin ymmärrystä yksilön kykynä tuntea, ajatella tai toimia älykkäästi (ks. Kilpatrick 2009, 42). Tässä luvussa 'ymmärtäminen' merkitsee jäsentynyttä tietämistä, joka toimii ajattelun ja oppimisen resurssina (Hiebert 1986; Leinonen 2002; Haapasalo 2004). Vanhentunut kielenkäyttö ei anna parasta kuvaa kestonmuistin tietojärjestelmästä, joka perustuu kahteen erilliseen tietolajiin: proseduraalinen tieto ja propositionaalinen tieto. Sen mukaan proseduraalisen tiedon alkeisyksikkö on produkti ja propositionaalisen vastaavasti propositio (Marzano 2001; Saariluoma 1990). Duaalisessa tiedonkäsityksessä näiden tietolajien leikkaus (Kuvio 5) edustaa proseptuaalista tietoa ja sen alkeiselementti on prosepti. Proseptuaalisen tiedon tehokkuus perustuu laajoihin ja joustaviin mieltämysyksiköihin, jotka lisäävät tiedon käyttövalmiutta uusiin tilanteisiin ja säästävät siten muistiresurseja.

Kilpatrick ym. (2009, 118) puhuvat käsitteellisestä ymmärtämisestä, jolla he tarkoittavat systemaattista ja toiminnallista matemaattisten ideoiden hallintaa. Tässä tapauksessa ymmärtäminen toimii tiedollisena resurssina, joka tarjoaa teoreettisen perustan, viitekehyksiä, malleja, strategioita ja menetelmiä matemaattiselle ajattelulle. Ymmärtäminen on amerikkalaisten punosmallissa kietoutunut monin tavoin osaamisen muihin komponentteihin, joita ovat taidollinen sujuvuus, strateginen kompetenssi, mukautuva päättely ja toiminnallinen valmius. Hiebert ja Carpenter (1993) esittävät suuren joukon ymmärtämisen seuraamuksia, jotka ovat hyödyllisiä tiedon käytössä ja oppimisessa kuten muistin tehostaminen, siirtovaikutuksen lisääntyminen, myönteinen vaikutus uskomuksiin sekä päättelyn, päätöksenteon ja ongelmanratkaisun tehostuminen. Useimmiten tutkimuskirjallisuudessa ja varsinkin arkikielessä ymmärtämisellä tarkoitetaan ajattelun ja toiminnan perusteita tai resurseja.

Määritelmän mukaan ymmärtämisen taso riippuu tietoverkon elementtien lukumäärästä ja voimakkuudesta (Hiebert & Carpenter 1993). Roddin (2000) termein tiedollisia oikeutuksia on voimakkuuden kriteerein kahta tyyppiä. Toinen (justification) on argumentti, joka vaikuttaa yksilön intuitiivisiin uskomuksiin. Toinen (warrant) on taas argumentti, joka saa haltijansa vakuuttuneeksi, että väite on epäilyksettä tosi. Edellisessä tapauksessa oikeutus perustuu informaaliin tietoon, jolloin tietoverkon kytkentöjen lukumäärä voi kasvaa suureksi. Vahvan (warrant) argumentaation tapauksessa linkkien variaatio ei ole näin rikas. Matemaattisen ajattelun kehittymiseen kuuluu kuitenkin molempien oikeutustyyppien tasapuolinen kehittäminen (Viholainen 2008; Hähkiöniemi 2006).

5.1.3.2 Mikä on tulkinnan (Y2) tehtävä mielekkään oppimisen mallissa?

Semiotiikan näkökulmasta matematiikan maailma on lingvistinen ja kuvallinen, jossa luonnollinen kieli, kuvakieli ja matematiikan oma symbolikieli vuorottelevat sisältöjen ilmaisuvälineinä (Joutsenlahti & Kulju 2017). Opetuksessa on useimmiten kysymys verbaalisesti tai matematiikan symbolein annetusta tehtävästä, jonka tulkintaan (Y2) valitaan sopiva viitekehys kestopuolistista. Jos tällainen viitekehys löytyy, oppijalla on mahdollisuus saada oikea käsitys tehtävän sisällöstä. Resnickin (1987) mukaan tekstin lukeminen ei ole yksinkertainen perustaito, vaan ennakoitua, pohdiskelua ja arviointia edellyttävää toimintaa. Lukeminen voidaan jakaa kahteen peräkkäiseen osaan: sananmukainen vaihe ja päättely (Hillerich 1977). Edelliseen kuuluu tekstin keskeisten ajatusten jäljittäminen. Jälkimmäinen on taas päättelyn ja päätöksenteon vaihe, joka kuuluu osittain jo synteisiin (Y3). Tulkinta tapahtuu kielen kuvateoriaa soveltaen siten, että sanat kytketään relevantteihin olioihin ja lauseen rakenne antaa asiasisällön (Wittgenstein 1971/1922).

Lukemisessa tekstin ymmärtäminen (Y2) on sen sisällön oivaltamista niiden esitietojen, oletusten ja odotusten varassa, joita lukijalla on aiheesta (Fairclough 1989). Se edellyttää päättelyä ja sellaisten taustatietojen (Y1) käyttöä, mitä ei ole saatavilla itse tekstissä (Linnankylä 1987). Haastavimmillaan lukeminen on ongelmanratkaisua, joka tapahtuu osittain päättelymoduulissa. Oppilaan ennakkotietojen ja -taitojen arvioinnissa on otettava huomioon, että tutkimusten (IDA 2012) mukaan väestöstä 5 - 20 % kärsii lukemis- ja kirjoittamisvaikeuksista. PISA-tutkimusten mukaan Suomen 9-luokan oppilaista 11 % ei saavuta edes välttävää lukutaitoa (OECD 2016, 27). Sanaston ja symbolien tulkintavaikeudet Y2 saattavat johtaa tilanteeseen, jossa matematiikka on sanojen tai symbolien manipulointia ilman sisältöä.

5.1.3.3 Miten synteesi (Y3) toimii mielekkään oppimisen mallissa?

Oppimistehtävän laadusta riippuen edetään kuvion 5 mallissa eri reittejä, mutta mielekkäessä oppimisessa oppimissyklit (1. ja 2.) tulevat synteisiin Y3, ja tulos integroidaan kestopuolistin tietojärjestelmään Y1. Synteesissä tiedon keskeinen sisältö esitetään tiivistettynä yleistetyssä muodossa symbolisena ja kuvallisena; Paivion (1971) termein kyseessä on logogens ja imagens. Synteesin tekemiseen kuuluu yksityiskohtien eliminointi ja korvaaminen yleistyksillä ja periaatteilla (Leinonen 2012). Tässä vaiheessa on päätet-

tävä, onko uusi tieto pätevää ja onko se yhteensopivaa eli mielekästä oppijan aiempiin tietoihin nähden (Marzano 2001, 40). Vaativimmillaan mielekäs oppiminen edellyttää, että järjestelmän solmujen ja linkkien rakentamisessa yksilön tulee tietää toimintansa perusteet ja logiikka (Haapasalo 2004, 53). Kun tavoitteena on tuottaa koherentti tietojärjestelmä, oppijan on integroitava saatu informaatio tietojärjestelmäänsä, jossa on vahvoja kytkentöjä miksi-kysymysten varalle. Ymmärtämisen (Y1) aste riippuu verkon linkkien lukumäärästä ja voimakkuudesta (Hiebert & Carpenter 1993).

5.1.3.4 Mikä on ongelmanratkaisun asema mielekkään oppimisen mallissa?

Jos annettu tehtävä ei ratkea välittömästi yksilön hallussa olevilla keinoilla (Y1,Y2,Y3), kysymyksessä on ongelmatehtävä, jota työstetään keskikehällä (2.). Tällä kehällä olevan päättelyovaalin toimintoihin kuuluu ongelmanratkaisun lisäksi esimerkiksi todistaminen, mallintaminen ja päätöksenteko (Harel 2009). Kyseistä ovaalia voidaan pitää myös ongelmanratkaisun moduulina ja matemaattisen ajattelun ytimenä, koska sen muihinkin toimintoihin sisältyy ongelmien ratkaisemista (ks. esim. Schoenfeld, 1992). Polyan (1957/1945) mukaan ongelmanratkaisu etenee ymmärtämisen, suunnittelun, suunnitelman toteuttamisen ja ratkaisun tarkistamisen kautta muistijärjestelmään. Schoenfeld (emt. 348) pitää ongelmanratkaisun osatekijöinä resursseja, strategioita, kontrollia, emootioita ja uskomuksia, joista neljä viimeainittua ei kuulu tämän työn piiriin. Resursseilla tarkoitetaan sitä tietotaitojen (Y1) varantoa, joka on ratkaisijan käytössä ongelmatilanteissa. Ongelman ratkaisemisen ensimmäinen vaihe edellyttää tilanteen ehtojen hahmottamista (Y2) ennakkotietojen varassa. Resursseja tarvitaan myös suunnitelman tekemiseen, sen toteuttamiseen ja ratkaisun tarkistamiseen. Tarkistamisen jälkeen ratkaisusta tehdään synteesi ja integroidaan oppijan tietojärjestelmään. Avoimet ongelmat ovat ymmärtämisen kannalta merkittäviä, koska ongelman ratkaisuvaihtoehtojen moninaisuus voi tuottaa joukon erilaisia tuloksia, jotka vahvistavat uusilla kytkennöillään tietoverkkoa (esim. Pehkonen 1997; Haapasalo 2004).

5.1.3.5 Mikä on akkommodaation (Y4) tehtävä mielekkään oppimisen mallissa?

Oppiminen ei välttämättä päädy tiedon mielekkääseen integrointiin edes ongelmanratkaisun kautta. Kysymyksessä voi olla esimerkiksi kognitiivisesta dissonanssista (Festinger 1958) johtuva konflikti, johon ei löydy mielekästä ratkaisua yksilön prospektuaalisen tiedon puitteissa. Paradoksi löytäminen tarjoaa keinon, joka voi laukaista lukkiutuneen tilanteen. Satakunta vuotta sitten nobelisti Niels Bohrin oppilas oli sattunut kuulemaan opettajansa mutinaa: *Loistavaa olemme törmänneet paradoksiin. Nyt voimme todella toivoa edistyvämmä* (De Guzmán 1990, 55). Tällaisessa tilanteessa on koeteltava (Y1):n rakenteita, joka tapahtuu ovaalissa Y4 ja jota testataan kehällä 3. Tällöin ratkaisua voidaan etsiä uskomusten, ennakkotietojen ja hiljaisen tiedon muunnoksilla, tai on opittava kokonaan uusi käsite. Muutosten avulla pyritään löytämään uusi viitekehys, näkökulma, malli tai teoria tilanteen laukaisemiseksi (Piaget 1971).

Akkommodaatiossa tietojärjestelmien (Y1) muuttamisen aste voi vaihdella yksittäisten linkkien lisäämisestä tai uuden käsitteen oppimisesta aina perusteellisiin rakennemuutoksiin (Vosniadou 1994; Leinonen 2002; Merenluoto 2005).

Päätteeiksi vielä: Ajatus tiedon ja käsitteen dualistisesta luonteesta ohjaa joustavasti mielekkään oppimisen prosesseja kuten Ausubelin, Skempin, Sfardin, Harelin teorioista ja kuvan 5 mallista nähdään. Mielekkäs oppiminen tuottaa yksilölle koherenttia tietojärjestelmää, jonka vastakohtana olisi irrallisten faktojen rutiinioppiminen. LWU-tradition mukaisesti oppiminen palautuu lopulta olemassa olevan tiedon rikastumiseen tai syväoppimiseen (Dewey 1998/1910; Marton 1993; Ogden & Richards 1946). Oppimisen tuloksekas ohjaaminen edellyttää oppimisprosessien ja ymmärtämisen reaaliaikaista arviointia, josta on annettu esimerkkejä artikkeleissa C ja E.

Yhteenveto mielekkään oppimismallin toiminnasta: Mielekkään oppimisen malli on rakennettu atomistisen kaavan mukaan, jossa systeemi konstruoidaan peruselementtien ja niiden välisten kytkentöjen varaan. Kaksi ensimmäistä kysymystä pohjustavat mielekkään oppimismallin rakentamista. Niissä on selvitetty ajattelun ja ymmärtämisen peruselementtien luonnetta ja tehtäviä oppimisessa.

Mallin rakentamisen päävaihe oli ymmärtämisen eri muotojen sovittaminen mielekkään oppimisen ympäristöön. Kaavion yläosassa kaksi toisiaan leikkaavaa ovaalia esittävät kesto- ja tiedonmuistin tietoresurssit, ja alaosan ovaalit viittaavat työmuistin prosesseihin. Oppiminen etenee näiden tasojen vuorovaikutuksen tuloksena. Selkeyden vuoksi esitetään oppimispolut kehä kerrallaan. Mallissa on kolme kehää, joita pitkin oppiminen etenee nuolen osoittamaan suuntaan. Oppiminen etenee pääosin vastapäivään, mutta vuorovaikutuksen luonteen mukaisesti tarkistusten ja testausten tekemiseksi tai lisäresurssien hankkimiseksi on palattava takaisin. Toistuvat kierrokset oppimiskehillä vahvistavat oppimista. Oppimispolku alkaa siitä, kun oppija ottaa vastaan uutta informaatiota ulkoisista tai sisäisistä lähteistä:

Kehä 1: Oppija tulkitsee (Y2) vastaanottamansa informaation viitekehyksessä, joka on saatu kesto- ja tiedonmuistin resurssista (Y1). Jos tulkintaongelmia ei ilmene, oppija tekee saamastaan materiaalista synteessin ja muotoilee sen omaan representaatiojärjestelmäänsä sopivaksi (Y3). Lopulta hän integroi tiivistetyn tiedon kesto- ja tiedonmuistin tietojärjestelmään (Y1).

Kehä 2: Kun oppija saa tehtävän, jolle ei löydy välitöntä ratkaisua hänen tietojärjestelmästään (Y1), hän voi mennä reittiä (2) päättelykeskukseen. Täällä etsitään käsillä olevasta informaatiosta ne olennaiset tekijät ja ehdot, joita ongelman ratkaiseminen edellyttää. Kun ne on löydetty ja jäsennetty, on Polyan (1954/1971) mukaan tilanne hallinnassa ja ymmärretty. Tämän jälkeen on vuorossa suunnitelman tekeminen ja sen toteuttaminen. Ratkaisun tarkistamisen jälkeen prosessista tehdään synteesi (Y3) ja tulos integroidaan tietojärjestelmään Y1.

Kehä 3: Jos oppija kohtaa ongelmatilanteen, johon ei löydy ratkaisua päättelymoduulissa, kysymyksessä voi olla esimerkiksi paradoksi, ristiriita, vajavaiset pohjatiedot tai joku muu seikka, joka vaatii tietojärjestelmässä (Y1) uudelleenjärjestelyä. Tällöin voidaan edetä ulkokehää (3) pitkin akkommodaatiomoduliin (Y4) ja työstää siellä kesto- ja tiedonmuistin tietojärjestelmää niin, että tehtävä voidaan ratkaista reittiä (2) noudattaen. Akkommodaatioissa (Y4) muutos voi olla paikallinen kuten opiskelijalla, joka huomasi ristiriidan avulla, että nolllalla ei voi jakaa lukuja (Ote 6, kysymys 1). Laajimmillaan akkommodaatio koskee kokonaisen paradigman muutosta, joita on tapahtunut esimerkiksi tähtitieteessä.

5.2 Yhteenveto

Ymmärtäminen kuuluu niihin yleiskäsitteisiin, joiden laaja-alaisuus osoittaa, kuinka tärkeästä asiasta on kysymys. Sanan kääntäminen kielestä toiseen paljastaa kulttuurisidonnaisia näkemyseroja ilmaisun merkityksestä. Ruotsinkielinen sana 'förståelse' viittaa edellä oleviin seikkoihin. Kysymyksessä voi olla tietty näkökulma jonkin asian tarkastelussa. Englannin kielessä 'understanding' viittaa alla olevaan ajatukselliseen perustaan, uskomusjärjestelmään tai teoriaan. Suomen kielessä 'ymmärtäminen' viittaa tilanteen hallintaan, kun se on ympäröity ja saatu siitä pitävä ote tai käsitys.

Ymmärtämisen tutkimuksella on pitkä historia. John Locken teos "An essay concerning human understanding" ja David Humen teos "An Enquiry Concerning Human Understanding" 1600- ja 1700-luvuilta käsitteivät laajasti ihmisen älyllisiä toimintoja. Eino Kaila (1938) käänsi Humen teoksen nimellä *Tutkimuksia inhimillisestä ymmärryksestä*. Locke (1995/1692, 80) tarkoitti sanalla 'understanding' ajattelun kykyä 'power of thinking', mutta sen suomenkielinen vastine voisi olla myös ymmärrys, järki tai äly. Saksankielessä vastaava sana on 'Vernunft'. Sanoman ymmärtämiseksi on tunnettava tekstin ennako-oletukset, sillä traditiot määrittävät sanojen taustaoletuksia. Opetuksessa ja varsinkin vieraskielistä tekstiä luettaessa on otettava huomioon sanojen merkitykseen liittyvät kulttuuriset taustaoletukset ja metaforat, koska ajatuksemme ovat sanojemme vankeja (Wittgenstein 1981/1953, 87). Termien merkityksiä pyritäänkin selkiyttämään käsiteanalyysillä, määrittelyillä ja tarkentamalla kohdetta, mutta törmäämme kuitenkin sanavalintojen ongelmaan (Aaltola 1989).

Käsitteet, tieto, ymmärtäminen ja ajattelu ovat linkittyneet toisiinsa sillä tavoin, että niiden oppiminen, opettaminen tai tutkiminen erillisenä objekteina on melkein pä mahdotonta. Kirjallisuudesta löytyy maininta, että käsite on sanakirjantekijän painajainen (ks. Silfverberg 1999, 67). Marzano (2001) ei halua käyttää sanaa 'käsite' lainkaan, vaan puhuu sen sijaan yleistyksistä ja Gagne (1977) korvaa käsitteen yleistävillä säännöillä. Tall ja Vinnerin (1981) mukaan yksilöllä on käsitekuva yleistyksestä. Haapasalo (2004, 73) pitää käsitteitä yksilön mentaalina tai yhteisöllisesti hyväksytyinä ilmauksina tai merkityksinä. Käsitteen ja symbolin välinen suhde on Aaltolan (1989, 20) mukaan oppimisen kannalta ongelmallinen, jota myös Hähkiöniemi (2006, 38) pohti geometrinen kuvioiden tapauksessa. Monet tutkijat Hähkiöniemen (emt.) ja Viholaisen (2008) tavoin pitävät representaatioita ajattelun välineinä, joilla on sisäinen ja ulkoinen ilmenemismuoto. Jos abstraktille käsitteelle ei löydy mentaalista ilmentymää, voidaan ajatusoperaatioita suorittaa symboleilla. Toisaalta saattaa käydä niin, että oppilas hallitsee käsitteen ja ymmärtää asian, mutta ei pysty antamaan sille verbaalista esitysmuotoa (Kilpatrick 2001, 118). Tässä tutkimuksessa käsite on realistisen hengen mukaisesti tietoisuutta attribuutista, joka voidaan ilmaista symboleilla (Artikkeli B).

Tutkimuksen ensimmäisessä kysymyksessä on selvitetty käsitteen luonnetta ja tehtäviä oppimisen näkökulmasta. Käsitteellä on julkinen ja yksilöllinen ulottuvuus. Edellisen mukaan käsite on kulttuurissa kehittyvä entiteetti, mutta yksilön kohdalla kysymys on ajattelun avaintekijästä. Se opitaan sosiaalisen vuorovaikutuksen ja yksilön oman

ajattelun tuloksena. Vasta subjektin aktiivisen käsitteellisen toiminnan kautta tieto ja inhimillinen kokemus on mahdollinen (Aaltola 1989, 12). Käsitteellä saamme asioista otteen ja näemme tai *ymmärrämme* ne jonakin (a way of seeing something). Idealistisen kannan mukaan hahmotamme maailman projisoimalla merkitykset kohteisiin, mutta realistille käsitteet ovat tietoisuuksia olioihin kuuluvista attribuuteista. Viimemainitun mukaan esimerkiksi lukuja, niihin kuuluvia ominaisuuksia ja suhteita on olemassa, ja meidän tehtävämme on ottaa niistä selvää. Emme kuitenkaan voi kommunikoida käsitteillä, vaan tarvitsemme niiden välittämiseen merkkejä. Merkkien viittauksellisia kohteita kutsutaan *referentiaalisiksi merkityksiksi*. Kun yksilö kytkee merkin oloon tai asiaan ja antaa sille nimen tai sisällön, on kysymyksessä tulkinnallinen *ymmärtäminen* (interpretation). Merkkejä ja merkkijärjestelmiä tulkitaan konteksteissaan, jolloin sama merkki saa eri ympäristöissä tai järjestelmissä asemansa mukaisen eli *holistisen merkityksen* (Artikkeli A).

Kun puhutaan konseptuaalisesta tiedosta, käsitetiedosta tai käsitteellisestä ymmärtämisestä, on käsite avaintekijä. Tieto ei ilmene pelkästään osaamisena tai propositionaalisina väitteinä vaan pikemminkin niiden kombinaationa. Dualistinen piirre kuuluu myös ymmärtämiseen ja käsitteeseen (Kilpatrick 2009). Ymmärtäminen liittyy tiettyyn henkilöön (Hiebert & Carpenter 1992), kun taas tieto on myös julkisyhteisöllistä. Ymmärtämiseen ei välttämättä kuulu väitteen totuusehtoa, ja voimme ymmärtää asian myös heikoin perustein tai virheellisesti. Toisaalta väittäminen, että ymmärtää, on rituaalinen teko ja sen esittäjältä odotetaan toiminnallista osaamista, kuvaamista tai selittämistä väitteensä perusteeksi (Austin 1979). Ymmärtäminen tiedon hallintana edellyttää valmiutta arvioida tiedon perusteita. Kognitiivisten prosessien tai tilojen itsearviointi ja -kontrollointi tehdään metatason puitteissa (Ruohotie 1997; Marzano 2000). Metakognitio on jätetty tämän tutkimuksen ulkopuolelle.

Kommunikoinnissa vaihdetaan ajatuksia sellaisten ilmaisujen välityksellä, joilla on referentiaaliset ja kontekstuaaliset merkityssisällöt. Ajatuksia ja keskusteluja työstetään merkitysten (meaning tai sense) maailmassa. Tieto ei siirry automaattisesti puheesta tai kirjoituksesta vastaanottajalle, vaan vastaanottajan on tulkittava informaatio ennalta hankitun viitekehyksen varassa. Tulkitusta aineistosta tehdään tulkinnan jälkeen synteesinä yleistys ja oppijan järjestelmään sopiva representaatio. Uuden sanoman järkevyyttä (reasonableness) ja mielekkyys (sense) arvioidaan ennen kuin se voidaan kytkeä *mielekkäästi* aiemmin opittuun tietojärjestelmään (Ausubel, 1968; Piaget 1978; von Wright 1996; Marzano 2001). Martonin ym. (1993) termin tekstin *merkityssisällön* oivaltaminen (a way of seeing something) on vedenjakaja, joka erottaa ymmärtämällä oppimisen rutiini- eli instrumenttioppimisesta.

Toisessa kysymyksessä siirrytään aktiivisen tiedon käsityksen piiriin (Niiniluoto 1988). Siinä tutkitaan tietoverkon syntymistä, jonka ehtona on vähintään kahden tietoaikion linkittäminen toisiinsa. Kysymyksessä on hankitun tiedon hyväksyminen ja kytkeminen oppijan omaan tietoverkkoon. Tämä edellyttää itsenäistä arviointia, onko vastaanotetulla informaatiolla oikeutettua asemaa oppijan omassa tietojärjestelmässä. Oikeutus on normatiivinen tai arvottava käsite. Sen perusteella arvioimme, mitä meidän tulisi uskoa tai olla uskomatta (Lammenranta 1993, 129; Leinonen 2018). Peruste-

lut kytkevät tietoverkon osia toisiinsa, ja antavat valmiuden vastata kysymykseen *miksi* jotkut asiat liittyvät toisiinsa tai *miksi* eivät liity tai *miksi* ne ovat toistensa seurauksia. Tästä syystä ymmärtämiseen tähtäävässä oppimisessa ohjaajan tehtävä on haastaa oppija perusteltujen väitteiden etsimiseen ja tuottamiseen osuvilla *kysymyksillä* (Niiniluoto 1988). Tämän työn empiirisissä osioissa (Artikkelit C ja E) on kysymyksillä haastettu opiskelijoita pohtimaan perusteluja väitteille. Kokeilu tuottikin rohkaisevia tuloksia. Sopivien kysymysten valintaan ei opettajalta kuitenkaan riitä pelkästään oppiaineen hallinta, vaan on tunnettava opiskelijan oppimisvalmiudet ja ympäristötekijät. Pohjatietoja voidaan selvittää keskustelujen, testien tai kirjoitelmien avulla, kuten Artikkelin E kokeilussa on tehty. Opettajan tehtävä on sokraattisen perinteen mukaisesti oppimisprosessin ja reflektiivisen ajattelun tukeminen (Hakkarainen ym. 2004, 104). Aktiivilla vihjeillä ja kysymyksillä herätetään opiskelijan huomio relevantin kontekstin valintaan, mutta niiden tulee olla Vygotskin lähikehityksen vyöhykkeen sisäpuolella. Palautteen antaminen ja väärinymmärrysten haastaminen on pyrittävä suorittamaan tilannekohtaisena, eikä vasta perinteisen opetuksen tavoin kurssin päätteeksi. Kysymyksillä tuetun opetuksen toimintoja on kokeiltu menestyksellä ja esitelty tarkemmin Artikkeleissa C ja E.

Kolmas kysymys on jatkoa edellisille, missä tutkijan synteettinen toiminta on mielekkään oppimismallin kokoavaa luomista kerätyn aineiston pohjalta (Jussila ym. 1989). Saadussa oppimismallissa oppija voi jatkaa koherentin tietoverkon rakentamista edellisessä kysymyksessä esitettyjen ehtojen mukaisesti. Mallilla voi kuvata dialektista oppimisprosessia, jossa oppija päätelee, mitkä kytkennät ovat mielekkäitä ja järkeviä. Prosessi etenee, kun kestopuistun konseptuaalinen ymmärtäminen (Y1) ja työmuistun aktiviteetit (Y2, Y3, Y4 ja päättely) ovat jatkuvassa vuorovaikutuksessa keskenään.

Mallin ensimmäinen sykli (Y1-Y2-Y3-Y1) vastaa Piagetin (1978) assimilaatiota, joka rikastaa konseptuaalista tietoa harjoittelun ja pohdintojen avulla. Uuden asian oppimisen ydintoiminnot ovat päättelymoduulissa. Jos annettu tehtävä ei ratkea välittömästi saatavilla olevilla keinoilla, kysymyksessä on ongelmatehtävä, jota työsteetään keskikehällä (Y1-Y2- päättely-Y3-Y1). Polyan (1957/1945) mallin mukaan ratkaiseminen käynnistyy ongelman tulkinnalla (Y1-Y2), jonka jälkeen ratkaiseminen siirtyy suunnitelman tekemisen ja toteuttamisen kautta ratkaisun tarkistamiseen. Hyväksytystä ratkaisusta tehdään synteesi Y3 ja saatu tulos integroidaan osaksi oppijan sisäistä tietojärjestelmää. Tuotosten integroituminen kestopuistiin aiheuttaa käsitteellisiä muutoksia (Merenluoto 2001, 53), jotka laajentavat ja syventävät apeperseptiivisen ajattelun resursseja (Saariluoma 1992). Dialektisissa prosesseissa ymmärrystä tuottavat toiminnot kehittävät samalla päättelyn, päätöksenteon, ongelmanratkaisun ja todistamisen taitoja (Harel 2009). Kestomuistista ei välttämättä löydy sopivaa viitekehystä tehtävän ymmärtämiseen ja suorittamiseen päättelyn kautta. Tällöin tietojärjestelmän tarkistaminen etenee moduulin Y4 kautta. Tietojärjestelmän Y1 rekonstruktion aste voi jatkaa aina radikaaliin paradigman muutokseen saakka (Kuhn 1994).

Mielekkään oppimisen malli tarjoaa opettajalle keinoja suunnitella opetusta, arvioida matemaattisen ajattelun kulkua ja ymmärtämistä sekä tunnistaa niihin liittyviä

puutteita. Mallin avulla opettaja voi arvioida oppimisen etenemistä ja löytää ne kipukohdat, missä oppilasta voisi enemmän ohjata. On hyvä pitää mielessä Kilpatrickin (2009, 48) muistutus siitä, että matematiikan opiskelu tuottaa parhaan tuloksen, kun osaamisen eri alueita kehitetään tasapuolisesti.

6 Pohdintaa

Ymmärtäminen on yksi päätavoite koulun kaikissa oppiaineissa (Opetushallitus 2014), mutta eikö kysymyksessä ole itsestäänselvyys? Voidaanko ylipäätään pitää mahdollisena varsinkaan matematiikan oppimista ilman ymmärtämistä? Mikä tekee ymmärtämisen niin haastavaksi? Mitkä ovat ymmärtämisen kriteerit opetuksessa, ja kuka niistä päättää? Tällaiset kysymykset inspiroivat minua selvittämään asiaa, joka vaikuttaa paradoksaalisesti selvältä mutta sekavalta.

Tiedon rakenteisiin pitäytyvä ymmärtämisen tutkimus on rajannut ulkopuolelle tärkeitä alueita ymmärtämisen laajassa kirjossa. Sanan 'ymmärtäminen' monimerkityksisyys tarjoaa uusia avauksia oppimisen ja opetuksen problematiikassa. Tässä tutkimuksessa lähdettiin selvittämään, miten ymmärtämisen muodot palvelevat oppimisen monisäikeisiä kulkuja. Ymmärtäminen eri muotoineen osoittautui ryväsikäsiteeksi mielekkään oppimisen ympäristössä. Jatkotutkimuksen tehtävä olisi päivittää ymmärtämisen muotoja opetuksen ja oppimisen laajemmissa kehikoissa, joissa myös affektiot ja metakognitio ovat mukana (ks. esim. Viitala 2015). Oppimisvaikeuksien paikantaminen ymmärtämisen eri muodoissa ja niihin liittyvät tukitoimet olisivat myös lisätutkimusten arvoisia asioita.

Ymmärtämisen lisäksi sujuvat laskutaidot ovat olleet keskeisimpiä tavoitteita matematiikan opetussuunnitelmissa. Tavoitteet ovat paikoin jääneet saavuttamatta. Olemme nähneet, että ylioppilaillakin esiintyy heikkouksia peruslaskutoimituksissa ja heillä on puutteita niiden toimintaperiaatteiden ymmärtämisessä (esim. Laine ym. 2004; Merenluoto & Pehkonen 2004; Leinonen & Pehkonen 2009). Ovatko sitten tavoitteet ylimitoitettuja tai epäselviä vai olisiko opetusmenetelmissä parantamisen varaa? Ymmärtäminen on opetussuunnitelmissa (esim. Opetushallitus 2004; 2014) tavoitteena, mutta itse ymmärtämisen käsite jää lukijan tulkittavaksi. Opettajien käsitykset ymmärtämisestä näyttävätkin yksipuolisilta, mikä edellyttäisi täydennyskoulutusta (Mousley 2003; 2004). Tutkijoille riittää tehtäviä opetussuunnitelmien tarkistamisessa, niiden kehittämisessä ja opettajien täydennyskoulutuksessa. Tärkeää olisi myös selvittää resurssien optimaalista käyttöä ja antaa suosituksia valinnaisuuden lisäämiseksi.

Tässä työssä kokeiltiin opetuksen dialogimenetelmää, jossa opettaja pyrki kysymyksillään aktivoimaan oppilaita uusien käsitteiden ja toimintaperiaatteiden pohtimiseen ja omaksumiseen. Oppilaat vastasivat kysymyksiin kirjallisesti, ja opettaja antoi palautetta lyhyellä viiveellä. Vaikka opetustapa tuotti tulosta, se osoittautui työlääksi, kun kommunikointi polveili kunkin oppilaan yksilöllisen ajatusmaailman mukaan. Kyselevän mielekkään oppimistavan tueksi kaivattaisiin kyselyn ja vastausten logiikan selvittämistä siten, että se tarjoaisi opettajille apukeinoja systemaattiseen opiskelun

ohjaamiseen. Siinä olisi jatkotutkimukselle tehtävää. Seuraavassa kappaleessa tarjotaan tähän aineksia ja lähteitä.

Tiedonrakentelun kyselevä reititys näyttää tähän tarkoitukseen lupaavalta (ks. Hintikka & Hintikka 1984; Rasinkangas 2010). Se perustuu matemaattiseen peliteoriaan, jossa shakkipelin hyviä siirtoja kuvaavat strategiset säännöt ovat mielenkiintoisempia kuin sallittuja siirtoja kuvaavat määrittelevät säännöt (Saariluoma 1989,161). Rasinkangas (emt.) esittelee kyselymallin kolme askeltyyppiä seuraavasti: deduktiiviset, interrogatiiviset ja kriittiset askeleet. Kyselevässä mielekkäässä oppimisessa kysymysten ja vastausten tulisi sijoittua oppijan Vygotskin (1982) lähikehityksen vyöhykkeelle. Silloin keskustelun osapuolet voisivat paremmin puhua samasta asiasta, ja väärinymmärryksiin päästäisiin heti käsiksi. Huomio onkin vaivihkaa siirtynyt asioista taustaoletuksiin ja niiden tarkistamiseen, jossa sokraattinen kätilöivä dialogi eli maieutiikka on parhaimmillaan. Sana 'maieutiikka' viittaa Sokrateen äitiin, joka oli ammatiltaan kätilö eli lapsenpäästäjä.

Dialogisella toiminnalla tarkoitetaan sanatarkasti väitteen ajatuksellisten perusteiden esiin kaivamista ja niiden kriittistä arviointia. Kreikankielen sana 'dia' on englanniksi 'through' ja 'logos' vastaa sanoja 'reason' ja 'speech'. Hobbesin (1662/1651) mukaan kielellä on kiistaton asema ihmisen älyllisissä toiminnoissa. Hänen mukaansa 'logoksen' kaksi edellä mainittua merkitystä ovat epäsymmetrisessä suhteessa toisiinsa. Hobbes esittää kuulijalle varoituksen sanan: puhua voi ilman ajatuksia, mutta ilman puhetta ei voi ajatella. Maieutiikassa opettajan tehtävä on auttaa haastavilla kysymyksillä oppilasta "vapauttamaan" tietonsa perustelut, jotka sisältyvät taustaoletuksiin, uskomuksiin ja hiljaiseen tietoon. Väärinymmärtämiseen ja ristiriitoihin voidaan puuttua sellaisilla apukysymyksillä, jotka virittävät tietojärjestelmästä relevantin viitekehyksen tai muuttavat tietojärjestelmää ja ajattelutapaa "oikeaan suuntaan". Kyselymallin kehittäminen ja aktivoivien kysymysten vaikutus oppimiseen tarjoavat tutkijoille mielenkiintoisia tehtäviä opetuksen, ajattelun ja ymmärtämisen problematiikassa.

Lähteet

- Ahonen, H. (1998). Merkityksen ja ymmärtämisen käsitteet kielessä ja musiikissa – Wittgenstein ja formalismi. *Niin & Näin*, 3, 26-31.
- Ahonen, S. (1994). Fenomenografinen tutkimus. Teoksessa L. Syrjälä, S. Ahonen, E. Syrjäläinen & S. Saari (toim.), *Laadullisen tutkimuksen työtapoja*, 114-160. Rauma: Kirjayhtymä Oy.
- Ahtee, M., Hannula, M., Laine, A., Näveri, L., Pehkonen, E., Portaankorva-Koivisto, P. & Wass, S. (toim.). (2016). *Iloa ongelmanratkaisuun*. Helsinki: Otava.
- Alasuutari, P. (2001). *Johdatus yhteiskuntatutkimukseen*. Helsinki: Gaudeamus.
- Alston, W.P. (1989). *Epistemic Justification: Essays in the Theory of Knowledge*. Ithaca: Cornell University Press.
- Anderson, J.R. (1980). *Cognitive psychology and its implications*. San Francisco (CA): Freeman.
- Austin, J.L. (1979). Other Minds. *Philosophical papers (3rd ed.)*. Oxford: Oxford University Press.
- Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Ausubel, D. P. & Robinson, F.G. (1973). *School learning: An Introduction to Educational psychology: A cognitive view*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- von Baeyer, H.C. (2005). *Informaatio. Tieteen uusi kieli*. T. Paukku (suom.). Helsinki: Terra Cognita.
- Bell, E.T. (1963). *Matematiikan miehiä*. Porvoo: WSOY.
- Bereiter, C. (2002). *Education and mind in the knowledge age*. Mahwah (NJ): Erlbaum.
- Berger, P.L. & Luckmann, T. (1994). *Todellisuuden sosiaalinen rakentuminen*. V. Raikola (suom.). Helsinki: Gaudeamus.
- Bloom, B. (ed.). (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals. Handbook 1. Cognitive domain*. New York: McKay.
- Bloom, B., Hastings, J.T. & Maudus, G.F. (1971). *Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning*. New York: McGraw-Hill Book Company.
- Boyer, C.B. (1994). *Tieteiden kuningatar, matematiikan historia, osat I ja II*. K. Pietiläinen (suom.). Juva: WSOY.
- Brown, A.L. (1992). Design Experiments: Theoretical and Methodological Challenges in Creating Complex Inventions in Classroom Settings. *The Journal of the Learning Sciences* 2(2), 141-178.
- Brownell, W.A. (1935). Psychological considerations in the learning and teaching of arithmetics: *Tenth yearbook of the National Council of Teacher of Mathematics*. New York: Columbia University, Teacher College, Bureau of Publications, 1-31.
- Brownell, W.A. (1945). When is arithmetics meaningful? *Journal of Educational Research*, 38 (7), 481-498.
- Brownell, W.A. & Sims, V.A. (1972/1946). The nature of understanding. In: F. J. Weaver & J. Kilpatrick (eds.), *The place of meaning in mathematics instruction: Selected theoretical papers of William A. Brownell Studies in Mathematics* (vol. 2, pp. 161-179). Stanford, CA: School Mathematics Study Group.
- Brunila, M. (1997). Richard Feynmanin ihmeellinen elämä - todella upeaa. *Tähdet ja avaruus* 5, 28-30.
- Burbules, N.C. (1993). *Dialogue in teaching*. New York/London: Teachers College Press.
- Burton, L. (1984). Mathematical thinking: the struggle for meaning. *Journal on Research in Mathematical Teaching*, 15 (1), 35-49.
- Burton, L. (1992). Using Language Arts to Promote Mathematics Learning. *The Mathematics Educator*, vol. 3 (2), 26-33.

- Cardoza, J. (1987). *Illiteracy is not a problem, but is that enough? ETS Developments* (vol. XXXII). Princeton NJ: Education Testing Service.
- Carr, W. & Kemmis, S. (1986). *Becoming critical*. Lewes: The Falmer Press.
- Collins, A., Joseph, D. & Bielaczyc, K. (2004). Design Research: Theoretical and Methodological Issues. *Journal of Learning Sciences*, 13(1), 15-42.
- Creswell, J.W. & Plano Clark, L. (2007). *Designing and Conducting Mixed Methods Research*. London: Sage.
- Cuba, E.G. & Lincoln, Y. S. (1985). *Naturalistic Inquire*. Clifornia: Sage Publications, Beverly Hills.
- Dewey, J. (1998/1910). *How we think? A Restatement of the Relation of Reflective Thinking to the Educative Process*. Chicago: Henry Regnery Co., A Gateway Edition.
- ECS (1982). *The information society: Are high school graduates ready?* Denver, CO: Education Commission of the States.
- Edelson, D.C. (2002). Design research: what we learn when we engage in design. *Journal of the Learning Science*, 11 (1), 105-121.
- Edwards, D. (1993). But what do children really think? Discourse analysis and conceptual content in children's talk. *Cognition and Instruction*, 11 (3 &4), 207-225.
- Entwistle, N. (1988). Motivational factors in student's approach to learning. In: R.S Schmeck (ed.), *Learning strategies and learnig styles* (pp. 21-51). New York: Plenum Press.
- Ericsson, K.A. 2003. The Acquisition of Expert Performance as Problem Solving. In: J.E. Davidson & R.J. Sternberg (eds.), *The Psychology of Problem Solving* (pp. 31-83). Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematical Education*. London: The Falmer Press.
- Eskola, J & Suoranta, J. (1998). *Jobdatus laadulliseen tutkimukseen*. Tampere: Vastapaino.
- Fairclough, N. (1989). *Lange and power*. London: Longman.
- Festinger, L. (1958). The motivation effect of cognitive dissonance. In: E. Lindsay (ed.), *Assesments of human motives*. New York: Grow Press.
- Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic and the intuitive components in a mathematical activity. In: R. Biehler, R. Sholz, R.W Strässer & B. Winkelmann (eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 231-245). Dortlecht: Kluwer.
- Fodor, J.A. (1998). *Concepts*. New York: Oxford University Press, Inc.
- Fodor, J.A. (2001). Ajattelusta on vaikea tehdä normaalitydettä. *Niin & Näin*, 2, 7-11.
- Gagne, R.M. (1977). *The conditions of learning*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Gergen, K. (1994). *Reality and Relationships. Soundings in social construction*. Cambridge: Harward University Press.
- Goldin, G.A. (1998). Representational systems, learning and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (2), 137-165.
- Gray, E. & Tall, D. (1993). Success and Failure in Mathematics: The Flexible Meaning of Symbols as Process and Concept. *Mathematics Teaching* 142, 6-10.
- Gray, E. & Tall, D. (2001). Relationships Between Embodied Objects and Symbolic Procepts: An Explanatory Theory of Success and Failure in Mathematics. In: M. van den Heuvel-Panhuisen (ed.), *Proceedings of 25th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Educatio (PME)* (vol. 3, pp. 65-72). Utrecht University: Freudenthal Institute.
- Gray, E. & Tall, D. (2002). Abstraction as a natural process of mental compression. In: A. D. Cockburn & E. Nardi (eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education (PME)* (vol. 1 pp. 115-120). Norwich, UK: University of East Anglia.
- Greeno, J.G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research on Mathematics education*, 22 (3), 170-218.
- Greeno, J.G. & The Middle School Mathematics Through Applications Project Group (1998). The situation of knowing, learning and research. *American Psychologist*, 53 (1), 5-26.

- Gröhn, T. (1992). Fenomenografinen tutkimusote. Teoksessa T. Gröhn & J. Jussila (toim.), *Laadullisia läbestymistapoja koulutuksen tutkimuksessa*, 1-32. Helsinki: Yliopistopaino.
- Guilford, J.P. (1956). The structure of intellect. *Psychological Bulletin*, 53(4), July, 267-293.
- De Guzmán, M. (1990). *Matemaattisia seikkailuja*. M. Nääänen (suom.). Loimaa: Finn Lectura.
- Haapasalo, L. (2004). Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (ss. 50-83). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Hakkarainen, K., Lonka, K. & Lipponen, L. (2004). *Järki, tunteet ja kulttuuri oppimisen syrjäyttäjinä*. Porvoo: WSOY.
- Hakkarainen, K., Paavola, S. & Lonka, K. (2005). *Tiedonluomisen psykologia*. Helsinki: WSOY.
- Hammersley, M. (1992). *What's Wrong With Ethnography?* London: Routledge.
- Hannula, M.S., Evans, J., Philippou, G. & Zan, R. (2004). Affect in mathematics education – exploring theoretical frameworks. In M.J. Höines & A.B. Fuglestad (eds.). *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* July 14-18, 2004 in Bergen (vol. 1 pp. 107-109). Bergen: Bergen University College.
- Hannula, M.S., Maijala, H. & Pehkonen, E. (2004). Development of understanding and self-confidence in mathematics; grades 5-8. In M.J. Höines & A.B. Fuglestad (eds.). *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* July 14-18, 2004 in Bergen (vol. 3 pp. 17-24). Bergen: Bergen University College.
- Harel G. (2009). What is Mathematics? A Pedagogical Answer to a Philosophical Question. In: R. B. Gold & R. Simons (eds.), *Current issues in the philosophy of mathematics from the perspective of mathematicians*. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Hassinen, S. (2006). *Idealitöistä algebraa: IDEAA-opetusmallin kehittäminen algebran opetukseen peruskoulun 7. luokalla*. Helsingin yliopisto. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 274. Helsinki: Yliopistopaino.
- Heikkinen, H.L.T. (2007). Toimintatutkimuksen lähtökohdat. Teoksessa H.L.T. Heikkinen, E. Rovio & S. Syrjälä (toim.), *Toiminnasta tietoon. Toimintatutkimuksen menetelmät ja läbestymistavat* (ss. 16-37). Helsinki: Kansanvalistusseura.
- Heikkinen, H.L.T.; Kontinen, T. & Häkkinen, P. (2007). Toiminnan tutkimuksen suuntaukset. Teoksessa H.L.T. Heikkinen, E. Rovio & S. Syrjälä (toim.), *Toiminnasta tietoon. Toimintatutkimuksen menetelmät ja läbestymistavat* (ss. 39-76). Helsinki: Kansanvalistusseura.
- Heikkinen, H.L.T. & Syrjälä, L. (2007). Tutkimuksen arviointi. Teoksessa H.L.T. Heikkinen, E. Rovio & S. Syrjälä (toim.), *Toiminnasta tietoon. Toimintatutkimuksen menetelmät ja läbestymistavat* (ss. 144-162). Helsinki: Kansanvalistusseura.
- Heinämaa, S. (1994). Merkityksen alkuperästä. Teoksessa S. Heinämaa (toim.), *Merkitys* (ss. 61-71). Tampereen yliopisto: Jäljennepalvelu.
- Helmstad, G. (1999). *Understanding of understanding. An inquiry concerning experimental conditions for development learning*. Göteborg studies in educational sciences 134. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Herscovics, N. & Bergeron, J.C. (1983). Models for understanding. *International Reviews on Mathematical Education*, 23 (2), 32-37.
- Hiebert, J. & Carpenter, T.P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. In: D.A. Grows (ed.), *Handbook of research on mathematics learning and teaching* (pp. 65–97). New York: McMillan.
- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics. An Introductory Analysis. In: J. Hiebert (ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of Mathematics* (pp.1-27). Hillsdale, NJ.: Erlbaum.
- van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.
- Hillerich, R. L. (1977). *Reading fundamentals for preschool and primary children*. Columbus, OH: Merrill.

- Hintikka, J. & Hintikka, M.B. (1984). *Sherlock Holmes Confronts Modern Logic: Toward a Theory of Information-Seeking through Questioning*. Bloomington: Indiana University Press.
- Hirvonen, K. (2012). *Onko laskutaito laskussa? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun päättövaiheessa 2011*. Helsinki: Koulutuksen seurantaraportit 2014:4.
- Hobbes, T. (1962/1651). *Leviathan*. New York, London: Collier MacMillan.
- Huhtala, S. (2000). *Lähihoitajan oma matematiikka*. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 219.
- Hume, D. (1938/1748). *Tutkimuksia inhimillisestä ymmärryksestä*. E. Kaila (suom.). Porvoo: WSOY.
- Hume, D. (1999/1748). *An Enquiry Concerning Human Understanding*. New York: Oxford University Press.
- Huovinen, T. & Rovio, E. (2007). Toimintatutkija kentällä. Teoksessa H.T.L Heikkinen, E. Rovio & L. Syrjälä (toim.), *Toimintatutkija kentällä* (ss. 94-113). Helsinki: Kansanvalistusseura.
- Hähkiöniemi, M. (2006). *The Role of Representations in Learning the Derivative*. Sarja: Jyväskylä Studies in Education, Psychology and Social Research 104. Jyväskylä: University Printing House.
- IDA, International Dyslexia Association. (2012). *Dyslexia basics*. Retrieved on September 7, 2012, from <http://www.interdys.org/ewebeditpro5/upload/DyslexiaBasicsREVMay2012.pdf>
- Jokinen, A., Juhila, K. & Suoninen, E. (1993). *Diskursianalyysin aakkoset*. Tampere: Vastapaino.
- Joutsenlahti, J. (2005). *Lukiolaisten tehtävääorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä*. Acta Universitatis Tamperensis. Tampere: Tampere University Press.
- Joutsenlahti, J. & Kulju, P. (2017). Multimodal Languaging as a Pedagogical Model – A Case Study of the Concept of Division in School Mathematics. *Eduction Science*, 7(1).
- Jussila, J. (1992). Kvalitatiivista ja kvantitatiivista tutkimusta koskeva kiista ja kasvatustieteen kriisi. *Kasvatus*, 23 (3), 247-255.
- Jussila, J., Montonen, K. & Nurmi, K.E. (1989). Systemaattinen analyysi kasvatustieteiden tutkimusasetelmana. Teoksessa T. Grön & J. Jussila (toim.), *Laadullisia lähestymistapoja koulutuksen tutkimuksessa* (ss. 157-208). Helsingin yliopisto. Kasvatustieteen laitoksen tutkimuksia 123.
- Kaasila, R. (2000). *Eläydyin oppilaan asemaan*. Acta Universitas Lapponiensis 32. Rovaniemi: Lapin Yliopistopaino.
- Kaasila, R., Pehkonen, E. & Hellinen, A. (2010). Finnish pre-service teachers' and upper secondary students' understanding of division and reasoning strategies used. *Educational Studies in Mathematics*, 73 (3), 247-261.
- Kaila, E. (1939). *Inhimillinen tieto*. Helsinki: Otava.
- Kangas, J. (1975). *Opetukseen liittyviä keskusteluja*. Fysiikan laitos. Oulun yliopisto.
- Kalli, P. (2005). Ihminen tutkii itseään ja maailmaa. Teoksessa Kalli, P. & A. Malinen (toim.), *Realismi ja konstruktivismi* (ss. 10-13). Vantaa: Kansanvalistuksen seura ja Aikuiskasvatuksen Tutkimusseura.
- Kalliokoski, J. (1992). Miten tekstin merkitys syntyy. *Virke*. N:o 6, 4-9.
- Kant, I. (1997/1783). *Prolegomena*. V. Oittinen (suom.). Helsinki: Gummerus.
- Kansanen, P. (2004). *Opetuksen käsitemaailma*. Jyväskylä: PS-kustannus.
- Kieran, C. (1994). Doing and seeing things differently: A 25-year retrospective of mathematics education research on learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (6), 583-607.
- Kilpatrick, J. (2009). Conceptual understanding as a strand of the mathematical proficiency. In: J. Novotná & H. Maraová (eds.), *The development of Mathematical Understanding, Proceedings of The International Symposium Elementary Maths Teaching 23-28.8.2009* (pp. 42-53). Prague: Charles University.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (eds) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington DC: National Academic Press.
- Kilpatrick, J. & Weaver, J. F. (1977). The Place of William A. Brownell in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8 (5), 382-384.
- Koivunen, H. (1997). *Hiljainen tieto*. Helsinki: Otava.

- Komiteanmietintö (1970). *Peruskoulun opetussuunnitelma komitean mietintö I*. Opetussuunnitelman perusteet. Komiteanmietintö 1970: A 4. Helsinki: Valtion painatuskeskus.
- Korkman, S. (2016). *TV1 uutiset 10.10. klo. 20.30*. Helsinki: Suomen Yleisradio.
- Koskinen, R. (2009). Outlining the development of the theory of the meaningful framework for teaching mathematics. In: C. Winslow (ed.), *Nordic Research in Mathematics Education. Proceedings from Norma08 in Copenhagen* April 21 – April 25, 2008 (pp. 339-344). Rotterdam: Sense Publishers.
- Koskinen, R. (2016). *Mielekäs oppiminen matematiikan oppimisen lähtökohtana: Systemaattinen analyysi Journal for Research in Mathematics Education aikakauslehdien artikkelien pohjalta*. Tutkimuksia 379. Helsingin yliopisto. Helsinki: Picaset Oy.
- Kuhn, T. (1994). *Tieteellisten vallankumousten rakenne*. K. Pietiläinen (suom.). Juva: WSOY.
- Kupari, P. (1999). Laskutaitoharjoittelusta ongelmanratkaisuun. *Matematiikan opettajien matematiikkauskomukset opetuksen muovaajina*. Jyväskylän yliopisto. Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 7.
- Kusch, M. (1986). *Ymmärtämisen haasteet*. Jyväskylä: Pohjoinen.
- Laarni, J., Kalakoski, V. & Saariluoma, P. (2001). Inhimillinen tiedonkäsittely. Teoksessa P. Saariluoma, M. Kempainen & A. Hautamäki (toim.), *Moderni kognitiotiede* (ss. 85-127). Helsinki: Gaudeamus.
- Laine, K. (1984). *Ympäristöopin käsitteiden hallinta. Koulunkäynnin alussa ja luokittavan käsitteiden opetusstrategian vaikutus siihen*. Turun yliopiston julkaisuja. Sarja C, osa 49. Acta Universitas Turkuensis.
- Laine, A., Huhtala, S., Kaasila, R., Hannula, M.S. & Pehkonen, E. (2004). Luokanopettajaopiskelijoiden tilannesidonnaiset jakolaskustrategiat. Teoksessa S. Ahonen & A. Siikaneva (toim.), *Eurooppalainen ulottuvuus* (ss. 238-248). Soveltavan kasvatustieteen laitoksen tutkimuksia 252. Helsinki: Helsingin yliopisto.
- Laine, A., Näveri, L., Kankaanpää, A. Ahtee M. & Pehkonen, E. (2014). Teachers' and fourth graders' questions during a problem solving lesson. In: A. Ambrus & E. Vasarlehylä (eds.), *Proceedings of the 15th ProMath Conference in Eger 30.08. – 01.09. 2013* (pp. 124-135). University of Eger.
- Laine, A., Näveri, L., Pehkonen, E., Ahtee, M. & Hannula, M. S. (2017). *Connections of Primary Teachers' Actions and Pupils' Solutions to a open Problem*. International Journal of Science and Mathematics Education (pp. 1-17). Denver: Springer.
- Lakatos, I. (1977). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lammenranta, M. (1993). *Tietoteoria*. Tampere: Gaudeamus.
- Lehti, R. (2001). *Leijonan häntä. Luoko tietoa luonto vai päinvastoin?* Jyväskylä: Gummerus Kirjapaino Oy.
- Leino, J. (1977). *Matematiikan didaktiikka I*. Helsinki: Kirjayhtymä.
- Leinonen, J. (2007). Realismi, konstruktivismi ja symbolinen universumi luonnontieteissä. *Aikuiskasvatus*, 27 (3), 200-2005.
- Leinonen, J. (2011). Understanding and Mathematical Problem Solving. In: K. Szücs & B. Zimmermann (eds.), *Problem Solving in Mathematics Education. Proceedings of the 12th ProMath Conference September 10-12, 2010 in Jena* (pp. 85-94). Munster: WTM.
- Leinonen, J. (2012). Ymmärtämisen muodot ja matematiikan oppiminen. Teoksessa E. Yli-Panula, K. Merenluoto & A. Virta (toim.), *Koulu ja oppiaineiden monet kulttuurit, Ainedidaktiikan symposiumi Turussa* 11.2 2011. Suomen ainedidaktiikan tutkimusseuran julkaisuja, Ainedidaktisia tutkimuksia 3 (ss. 123-132). Turku: Painosalama.
- Leinonen, J. (2018). The roles of understanding and problem solving in meaningful learning. Teoksessa A. Ambrus (toim.), *Proceedings of the 17th ProMath Conference* 30.08. – 01.09. 2017 in Budapest (Painossa).

- Leinonen, J. & Pehkonen, E. (2009). Teaching for understanding in division: A case of elementary teacher students. In: J. Novotná & H. Moraová (eds.), *The development of mathematical understanding, Proceedings of International Symposium Elementary Maths Teaching 23-28.8.2009* (pp. 155-162). Prague: Charles University.
- Leinonen, J. & Pehkonen, E. (2011). Teacher students' improvements in calculation skills and understanding in the case of division. In B. Ubuz (ed.), *Developing Mathematics Thinking. Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* July 10-15, 2011 in Ankara (vol. 3 pp. 129-136). Ankara: Middle East Technical University.
- Lincoln, Y. & Guba, E. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills: Sage.
- Linnankylä, P. (1987). Lukutaito on kriittisen ajattelun taitoa. *Kasvatus* 18 (3), 227-232.
- Locke, J. (1995/1692). *An essay concerning human understanding*. New York: Prometheus Books.
- Leong, Y.H., Tay, G.E.; Toh, T.L., Quek, K.S., Toh, P.C. & Dindyal, J. (2016). Infusing Mathematical Problem Solving in the Mathematics Curriculum: Replacement Units. In: P. Felmer, E. Pehkonen & J. Kilpatrick (eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems* (pp. 309-325). Switzerland: Springer.
- Martino, A. & Maher, C. (1999). Teacher questioning to promote justification and generalisation in mathematics: What research practice has taught us. *Journal of Mathematical Behaviour*, 18(1), 53-78.
- Marton, F. (1988). Phenomenography – Describing Conceptions of the World around Us. *Instructional Science*, 10, 177-200.
- Marton, F. (1995). Phenomenography: A Research Approach to Investigation Different Understandings of Reality. In: P.R. Sherman & R.B. Webb (eds.), *Qualitative research in education: Focus and methods* (pp. 141-161). London: The Falmer Press.
- Marton, F., Dahlgren, L.O., Svensson, L. & Säljö, R. (1980). *Oppimisen ohjaaminen*. E. Pilvinen (suom.). Espoo: Weilin&Göös.
- Marton, F., Dall'alba, G. & Beaty, E. (1993). *Conception of learning. International Journal of Education Research*, 19 (3), 277-300.
- Marzano, R.J. (2001). *Designing a New Taxonomy of Educational Objectives*. London: Sage Publication Ltd.
- Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (1984). *Thinking Mathematically*. London: Addison Wesley.
- Mason, J., Drury, H. & Bills, L. (2007). Studies in the Zone of proximal Awareness. In: J. Mason & M. Spence (toim.). *Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing to act in the moment. Education Studies in Mathematics*, 38, 35-161.
- Mehtäläinen, J. (1992). *Tiedollinen kasvatus ja ajattelun kehittäminen. Opetus ja kasvatus*. Opetushallitus. Helsinki: VAPK-kustannus.
- Merenluoto, K. (2001). Lukiolaisen reaailuku. Lukualueen laajentuminen käsitteellisenä muutoksena matematiikassa. *Turun yliopiston julkaisuja*. Sarja C, osa 176. Turku: Painosalama Oy.
- Merenluoto, K. (2005). Discussion about conceptual change in mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 10 (2), 17-33.
- Merenluoto, K. & Pehkonen, E. (2004). Luokanopettajien matemaattinen osaaminen ja ymmärtäminen. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen* (ss. 414-436). Jyväskylä: Niilo Mäki Instituutti.
- Miettinen, R. (2000). Konstruktivistinen oppimisen näkemys ja esineellinen toiminta. *Aikuiskasvatus*, 4, 276-292.
- Mikkilä, M. (1998). *Conceptual change and textbooks: Possibilities of promoting metaconceptual awareness through text design*. Poster presented at the Second Symposium on Conceptual Change, November 6-9, 1998 in Madrid.
- Mills, G.E. (2007). *Action research. A guide for the teacher researcher* (3rd ed.). Upper Saddle River, NJ: Pearson Merrill Prentice Hall.

- Mousley, J. (2003). *Mathematical Understanding as Situated Cognition*. Australia. Bandoora: La Trobe University.
- Mousley, J. (2004). An aspect of mathematical understanding: The notion of “connected knowing”. In: M.J. Høines & A.B. Fuglestad (eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, July 14-18, 2004* (pp. 377-384). Bergen: Bergen University College.
- NCE (1983). *A nation at risk: The imperative for educational reform*. National Commission on Excellence in Education. Washington, DC: Government Printing Office.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Council.
- Nevanlinna, R. (1963). *Johdatus subteellisuusteoriaan*. Porvoo: WSOY.
- Niiniluoto, I. (1984). *Johdatus tieteenfilosofiaan: Käsitteen- ja teorianmuodostus*. Helsinki: Otava.
- Niiniluoto, I. (1988). Koulut ja aktiivinen tiedon käsite. *Kasvatus*, 19 (5), 333-340.
- Niiniluoto I. (1990). *Maailma, minä ja kulttuuri*. Helsinki: Otava.
- Niiniluoto, I. (1992). *Informaatio, tieto ja yhteiskunta*. 4. Painos. Helsinki: Valtion painatuskeskus.
- Niiniluoto, I. (1994). Merkitys-kollokvion avaussanat. Teoksessa S. Heinämaa (toim.), *Merkitys* (ss. 1-6). Tampereen yliopisto: Jäljennepalvelu.
- Novak, J.D. (1997). The Pursuit of a Dream: Education Can Be Improved. In: J.J. Mintzes, J.H. Wandersee & J.D. Novak (eds.), *Teaching Science for Understanding: A Human Constructivist View* (pp. 3-28). San Diego: Academic Press.
- Näveri, L. (2009). *Aritmetiikasta algebraan. Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana*. Helsingin yliopisto. Soveltavan kasvatustieteen laitos. Tutkimuksia 309. Helsinki: Yliopistopaino.
- OECD. (2016). Huipulla pudotuksesta huolimatta. Teoksessa J. Vettenranta, J. Välijärvi, A. Ahonen, J. Hautamäki, J. Huttunen, K. Leino, S. Lähteinen, K. Nissinen, V. Nissinen, E. Puhakka, J. Raupuro & M.-P. Vainikainen (toim.), *PISA 15 esituloksia. Opetus- ja kulttuuriministeriön julkaisuja 2016:41*. Helsinki: Helsingin yliopisto. <http://www.minedu.fi/export/sites/default/OPM/Julkaisut/2016/liitteet/okm41.pdf>
- Ogden, C.K & Richards, I.A. (1946). *The Meaning of Meanings*. New York: Harcourt, Brace and Company.
- Ojala, J. (1997). *Kirjoittamaton kirja, kirjoitettu kirja ja luonnon kirja. Planetaariset ilmiöt teksteinä ja kuvina peruskoulun ja lukion oppikirjoissa*. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 63.
- Ollila, M.-R. (1996). Minun tietoni ja virallinen tieto. *Tiedepolitiikka*, 2, 6-16.
- Opetushallitus (2004). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004*. Helsinki: Opetushallitus.
- Opetushallitus (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014*. Helsinki: Opetushallitus.
- Paavola, S., Lipponen, L. & Hakkarainen, K. (2004). Models of Innovative Knowledge Communities and Three Metaphors of Learning. *Review of Educational Research*, 74(4), 557-576.
- Paivio, A. (1971). *Mental imaginary and verbal processing*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Partanen, A.-M. (2011). *Challenging the School yhe Mathematics Culture: An Investigative Small-Group Approach*. Acta Universitatis Lappeensis 206. Rovaniemi: Lapin yliopistopaino.
- Pearsall, J. (ed.). (2002). *Concise Oxford English Dictionary*. New York: Oxford University Press.
- Pehkonen, E. (1997). Introductio to the concept “open-ended problem”. Teoksessa E. Pehkonen (toim.), *Use of open-ended problems on mathematics classroom*. University of Helsinki. Department of teacher education. Research report 176, 7-11.
- Pehkonen, E. (1999). Professorien matematiikkakäsityksistä. *Kasvatus* 30 (2), 120-127.
- Pehkonen, E. (2000). Ymmärtäminen matematiikan opetuksessa. *Kasvatus*, 31 (4), 375-381.
- Pehkonen, E. (2003). Tutkiva matematiikan oppiminen peruskoulussa. *Tieteessä tapahtuu*, 35-38.
- Pehkonen, E. (2011). Matemaattinen ajattelu ja ymmärtäminen. Teoksessa E. Pehkonen (toim.), *Luo-kanopettajaopiskelijoiden matematiikkataidoista* (ss. 11-27). Helsingin yliopisto. Tutkimuksia 328. Helsinki: Yliopistopaino.

- Pehkonen, E. & Törner, G. (1996). Mathematical beliefs and different aspects of their meanings. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 28 (4), 101-108.
- Peirce, C. (1992). Deduction, induction and hypothesis. In: N. Houser & C. Kloesel (eds.), *The essential Peirce. Selected philosophical writings 1 (1867-1893)*. Bloomington: Indiana University Press, 186-100.
- Perttula, J. (1997). Voivatko ihmiset ymmärtää toisiaan? *Psykologia*, 32 (467-470).
- Piaget, J. (1971). *Genetic epistemology*. New York: Norton.
- Piaget, J. (1973). *Introduction to genetic epistemology*. Vol. I (2. painos). Paris: PUF.
- Piaget, J. (1978). *Success and understanding*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Piaget, J. & Garcia, R. (1989). *Psychogenesis and the history of science*. New York: Columbia University Press.
- Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. London: Routledge.
- Pinker, S. (1997). *How the Mind Works*. New York: W.W. Norton & Company.
- Pirie, S. & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how we can characterize it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26 (2-3), 165-190.
- Platon (1999). Menon. Teoksessa M. Ikonen-Kaila, P. Saarikoski & M. Tyni (suom.), *Teokset II*, (ss. 109-148). Helsinki: Otava.
- Poikela, E. (2008). Miten informaatio muuttuu osaamiseksi? Teoksessa E. Sormunen & E. Poikela (toim.), *Informaatio, informaation taito ja oppiminen* (ss 55-84). Tampere: Tampereen Yliopistopaino Oy.
- Polanyi, M. (1969). *Knowing and Being*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Polanyi, M. (1983). *The Tacit Dimension*. Gloucester: Peter Smith.
- Polya, G. (1957/1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
- Potter, J. & Wetherell, M. (1987). *Discourse and Social Psychology. Beyond attitudes and behaviour*. London: Sage.
- Puolimatka, T. (2002). *Opetuksen teoria. Konstruktivismista realismiin*. Vammala: Tammi.
- Puolimatka, T. & Airaksinen, T. (1994). Elämän tarkoitus. Teoksessa S. Heinämaa (toim.), *Merkitys* (ss. 211-229). Tampere: Tampereen yliopisto.
- Raami, A. (2015). *Intuition Unleashed*. Aalto University. Department of media. Doctoral dissertations 29. Helsinki: Aalto ARTS Books.
- Rasinkangas, R. (2010). Tiedonhankinnan kyselymalli. <https://wiki oulu.fi/display/fysareena/tiedonhankinnan+kyselymalli>.
- Rauhala, L. (1997). Tajunnan tutkimus sen oman struktuurin chdoilla. *Niin & Näin*, 1, 64-68.
- Rautopuro, J. (toim.) 2014. *Hyödyllinen pakkoasku. Matematiikan oppimistulokset peruskoulun päättövaiheessa 2012*. Helsinki.
- Resnick, L.B. (1987). *Education and leaning to think*. Washington, DC: National Academy Press.
- Rodd, M.M. (2000). 'On mathematical warrants: proof does not always warrant, and the warrant may be other than proof?'. *Mathematical thinking and learning*, 2(3), 221-244.
- Rott, B. (2018). Problem solving in the classroom: How do teachers organize lessons with the subject problem solving. Teoksessa A. Ambrus (toim.), *Proceedings of the 17th ProMath Conference* 30.08. – 01.09. 2017 in Budapest (Painossa).
- Ruohotie, P. (1997). Itsensäätely oppimisessa. Teoksessa P. Ruohotie & J. Honka (toim.), *Osaamisen kehittäminen organisaatiossa*, 101-143. Seinäjoki: RT Consulting Team.
- Saariluoma, P. (1992). *Taitavan ajattelun psykologia*. Helsinki: Otava.
- Saariluoma, P. (1998). Adversary problem-solving and working memory. In: R.H. Logie & K.J. Gilhooly (eds.), *Working memory and thinking*, 121-122. UK: Psychology Press.
- Saariluoma, P. (2001). Moderni kognitiotiede. Teoksessa P. Saariluoma, M. Kempainen & A. Hautamäki (toim.), *Moderni kognitiotiede* (ss. 26-50). Helsinki: Gaudeamus.
- Sahin, A. & Kulm, G. (2006). Sixth grade mathematics teachers' intentions and use of probing, guiding, and factual questions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(3), 221-241.

- Sajama, S. (1994). Brentanon merkitysteoriasta ja sen ylitulkinnasta. Teoksessa S. Heinämaa (toim.), *Merkitys* (ss. 17-25). Tampere: Tampereen yliopisto.
- Salo, P. (1999). Ovatko käsitteet prototyyppisiä? *Psykologia*, 34, 171-180.
- Schank, R.C. (1982). *Dynamic Memory*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Scheffler, I. (1965). *Conditions of knowledge: An introduction to epistemology and education*. Clenview: Scott, Foresman and Company.
- Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. Teoksessa A. Schoenfeld (toim.), *Mathematical thinking and problem solving*, 53-70. Hillsdale NJ: Erlbaum.
- Seppälä, J. (1980). *Kristillisen uskon jäsentymisen nuorten elämäntilanteeseen rippikoulussa*. Uskon-
topedagogian julkaisuja B 4/1980. Helsinki: Helsingin yliopiston käytännöllisen teologian laitos.
- Sfard, A. (1988). On two metaphors for learning and of choosing just one. *Educational researcher*, 27(2), 4-13.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions. Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in Mathematics*, 22 (1), 1-36.
- Sfard, A. (1994). Reification as the Bird of metaphor. *For the Learning of Mathematics*, 14 (1).
- Sfard, A. (2002). Acquisitionist misunderstandings about understanding: What new conceptualisations of learning have to say about learning-with-understanding. Teoksessa E. Pehkonen (toim.), *Proceedings of the Workshop on Mathematical Understanding at Turku in June 2002* (pp. 5-25). Pre-Print sarja 2. Turku: Turun yliopiston Opettajankoulutuslaitos.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Siegel, S. (1956). *Nonparametric Statistics: For the Behavioural Sciences*. New York: McGraw-Hill, Inc.
- Sierpinski, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: Falmer Press.
- Silfverberg, H. (1999). *Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitteetieto*. Vammala: Vammalan kirjapaino Oy.
- Silverman, D. (1985). *Qualitative Methodology and Sociology: Describing The Social World*. Aldershot: Grower.
- Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77(20), 22-26.
- Skemp, R.R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale: Erlbaum.
- Sternberg, R. (1996). What is mathematical thinking? In: R. Sternberg & T. Ben-Zeev (eds.), *The nature of mathematical thinking* (pp. 303-318). Mahwah (NJ): Erlbaum.
- Säljö, R. (1979). Learning in learner's perspective. I. Some common-sense conceptions. *Reports from department of Education*. University of Göteborg. No. 76.
- Tautila, V. (2004). *The Concept of Organisational Competence – A Foundational Analysis*. Jyväskylä studies in computing 36. Jyväskylä: Jyväskylän yliopistopaino.
- Tall, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library 11*. Dordrecht: Kluwer.
- Tall, D. (2004). Introducing Three Worlds of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 23 (3), 29-33.
- Tall, D. (2005). A theory of mathematical growth thought embodiment, symbolism and proof, *Planetary Lecture for the International Colloquium on Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood*, Belgium, 5-7 July 2005.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limit and Continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12.
- Toom, A. (2006). *Tacit Pedagogical Knowing: At the Core of Teacher's Professionalism*. University of Helsinki. Faculty of Behavioral Science. Department of Applied Science of Education. Helsinki: Yliopistopaino.
- Tulving, E. (2000). Concepts of memory. In: E. Tulving & F.I.M. Craik (eds.), *The Oxford handbook of memory* (pp. 33-43). New York: Oxford University Press, Inc.
- Tuomela, R. (1983). *Tiede, toiminta ja todellisuus*. Helsinki: Gaudeamus.

- Tynjälä, P. (1999). *Oppiminen tiedon rakentamisena. Konstrukttiivisen oppimiskäsityksen perusteita*. Tampere: Tammer-Paino Oy.
- Vahervuo, T. & Kalimo, E. (1968). *Psykometriikan metodeja I. Tilastolliset perusmenetelmät*. Porvoo: WSOY.
- Vartiainen, E. (2005). *Dialogisuuden ymmärtäminen konsultoinnissa. Näkökulmana tutkiva konsultointi*. Aikuiskasvatus 2.
- Viholainen, A. (2008). *Prospective mathematics teacher's informal and formal reasoning about the concepts of derivative and differentiability*. University of Jyväskylä. Jyväskylä: University Printing House.
- Viitala, H. (2015). Emma's mathematical thinking, problem solving and affect. In: K. Kramer & N. Vondrová (eds.), *Proceedings of CERME 9 – Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Feb. 2015, (pp. 1294-1300)*. Prague, Czech Republic.
- Viitala, H. (2018). *Studying pupils' mathematical thinking through problem solving and view of mathematics: Case studies of Finnish comprehensive school pupils*. Doctoral dissertations at University of Agder. Norway. <http://hdl.handle.net/11250/2488446>
- Vilkko, R. (1997). Paul Bernaysin idealisoitu todellinen. Teoksessa S. Pihlström & T. Wallgren (toim.), *Ajatus 54, Suomen Filosofisen Yhdistyksen vuosikirja* (ss. 84-95). Helsinki.
- Vosniadou, S. (1994). Capturing and modelling the process of conceptual change. *Learning and instruction*, 4, 45-69.
- Vygotsky, L.S. (1982). *Ajattelu ja kieli*. K. Helkama & A. Koski-Jännes (suom.). Helsinki: Weilin+Göös.
- Väljjarvi, J. (2014). Osaaminen kestäväällä perustalla – Suomen PISA-tulosten kehitys vuosina 2000-2009. *Memos* 2014:1.
- Värri, V.-M. (2004). *Hyvä kasvatus – kasvatus hyvään*. Tampere: Tampere University Press.
- Wearne, D. & Hiebert, J. (1988). A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: Testing a local theory using decimal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (5), 371-384.
- Wilson, J. (1971). Evaluation of learning secondary school mathematics. In: B. Bloom, J.T. Hastings & G.F. Madaus (eds.), *Handbook of Formative and Summative Evaluation of Student Learning* (pp. 643-696). New York: McGraw-Hill Book Company.
- Wittgenstein, L. (1971/1922). *Loogis-filosofinen tutkielma*. H. Nyman (suom.). Helsinki: WSOY.
- Wittgenstein, L. (1981/1953). *Filosofisia tutkimuksia*. H. Nyman (suom.). Helsinki: WSOY.
- Wittrock, M.C. (1974). A generative model of mathematics learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 5 (4), 181-196.
- von Wright, G.H. (1971). *Explanation und Understanding*. Ithaca: Cornell University Press.
- von Wright, J. (1996). Oppiminen selviytymiskeinona. *Psykologia*, 31, 351-358.

Liite: Alkuperäiset artikkelit

- A Leinonen, J. (2002). Ymmärtäminen – jäsentynyttä tietämistä. *Kasvatus* 33 (5), 475-483.
- B Leinonen, J. (2003). Käsite ja ymmärtäminen. *Kasvatus*, 34 (1), 56-65.
- C Leinonen, J. & Korhonen, A. (2005). Miten arvioida matematiikan opiskelua ja ymmärtämistä. *Kasvatus*, 36 (1), 33-42.
- D Leinonen, J. (2011). Understanding and Mathematical Problem Solving. In: K. Szücs & B. Zimmermann (eds.), *Problem Solving in Mathematics Education. Proceedings of the 12th ProMath Conference September 10-12, 2010 in Jena* (pp. 85-94). Munster: WTM.
- E Leinonen, J. & Pehkonen, E. (2011). Teacher students' improvements in calculation skills and understanding in the case of division. In: B. Ubuz (ed.), *Developing Mathematics Thinking. Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME) July 10-15, 2011 in Ankara* (vol. 3, pp. 129-136). Ankara: Middle East Technical University.

A

Jorma Leinonen

Ymmärtäminen – jäsentynyttä tietämistä

LEINONEN, JORMA 2002. YMMÄRTÄMINEN – JÄSENTYNYTTÄ TIE-TÄMISTÄ. *Kasvatus* 33 (5). 475–483. — Ymmärtäminen on keskeinen tekijä yksilön tiedollisen maailmankuvan rakentamisessa. Se on tekijänä valikoivassa havainnoinnissa, suunnatussa tarkkaavaisuudessa ja kielellisten ilmausten tulkinnoissa. Maailmankuvan muodostamisessa yksilö työstää aktiivisesti yksittäisiä tietoja ja taitoja tietojärjestelmiksi ja toimintamalleiksi. Ymmärtäminen voidaan käsitellä tilaksi, jossa yksilö näkee tapahtumat osana laajempaa kontekstia tai käsitteellistä viitekehystä. Prosessina ymmärtäminen on hahmottava tiedollinen aktiiviteetti jäsentyneen maailmankuvan muodostamisessa. Ymmärretty, jäsentetty tieto on tavoittelemisen arvoista, koska se auttaa yksilöä näkemään oman tilanteensa, toimintavaihtoehdonsa ja vaihtoehtojen seuraukset. Ymmärtämistä voidaan tarkastella filosofisena, kielellisenä sekä psykologisena ilmiönä. Nämä eivät tietystikään ole toisiaan poissulkevia.

Asiasanat: konteksti, käsitejärjestelmä, näkökulma, tieto, tulkinta, viitekehys

Johdanto

Tiedolla ja tietämisellä on nykyisessä informaatioyhteiskunnassa keskeinen merkitys. Ongelmana ei ole tiedon olemassaolo tai saatavuus, vaan sen omaksuminen ja sisäistäminen käyttökelpoiseen muotoon. Deutsch (1997) pitää kaiken tarpeellisen faktatiedon mieleenpainamista yksittäisinä väitejoukkoina mahdottomana ja mielettömänä, koska joka päivä ilmestyy enemmän julkaisuja kuin ihminen pystyy elämässään lukemaan tai jo kova-kuoriaislajeja on 600 000. Hän asettaa tietämiselle ankaramman ehdon, ymmärtämisen. Fysiikan vuoden 1965 nobelisti

Richard Feynman ihmetteli oppimista-pahtumaa: ”En tiedä, mikä ihmisiä vaivaa. He eivät opi ymmärtämällä. He oppivat jollakin muulla tavalla, ulkoa tai jotenkin.” (Brunila 1997).

Tietäminen voi olla yksittäisten väitteiden hallitsemista, kun taas ymmärtämisen taustalla ovat jäsentävinä tekijöinä näkemykset, yleistyksiset ja teoriat. Ymmärretty tieto on tavoittelemisen arvoista, koska se auttaa yksilöä näkemään paremmin oman tilanteensa, toimintavaihtoehdonsa ja vaihtoehtojen seuraukset. Toisaalta ymmärtäminen liittyy niihin teoreettisiin

tiedonpyrkimyksiin, joiden tavoitteena on ainoastaan jäsentää ja hahmottaa maailmaa (Niiniluoto 1984, 73). Tällöin kiinnostuksen kohteena voivat olla esim. kaukaiset galaksit tai vaikkapa lukuteorian kysymykset, ilman että oltaisiin kiinnostuneita välittömistä hyötynäkökohdista.

Ymmärtämistä voidaan tutkia filosofisena, psykologisena tai kielellisenä ilmiönä. Ne eivät kuitenkaan ole toisiaan poisulkevia. Hume tutki ihmisen ajattelua ja päättelyä vuonna 1748 ilmestyneessä teoksessaan *An Enquiry concerning Human Understanding*. Lammenrannan mukaan (1993, 29) Hume oli empiristi ja varhainen kognitiotieteilijä. Muutamaa vuosikymmentä myöhemmin Immanuel Kant esitti rationaalisen ja empiirisen tiedon synteessin teoksessaan *Kritik der reinen Vernunft* (1781). Kantin mukaan tiedon muodostuksessa aistikokemuksen lisäksi tarvitaan ihmiselle lajityypilliset havainnon muodot ja ymmärryksen kategoriat (Kant 1997). Lyhyesti ilmaistuna tämä merkitsee, että "tiedostussubjekti antaa tiedolle sen muodon, aistimellinen kokemus taas antaa sisällön ("materian") eikä todellinen tieto ole mahdollista ilman muodon ja sisällön synteesiä" (emt., 12). Koska Humella (1938) ja Kantilla subjektin osuus on ratkaiseva tiedon muodostuksessa, ollaan konstruktivismin juurilla. von Wright tutki ymmärtämisen ja selittämisen välistä kytkeä teoksessaan *Explanation and Understanding* (1971). Analysoidessaan teorian selittävää tehtävää Tuomela (1983, 25) asettaa lähtökohdaksi käsitejärjestelmät, joita seuraa ymmärtämisen kautta selittäminen ja kuvailu.

Fenomenologinen psykologia tutkii maailmankuvan kehkeytymistä, muutosvaiheita ja muutosten ehtoja, jolloin maailmankuvan sisällöt muodostuvat merkityksistä (Rauhala 1990 ja 1997). Kognitiivisessa psykologiassa tiedolliset struktuurit ja skeemat ovat mielen jäsenyksiä

järjestelmiä, joiden avulla ihminen orientoituu maailmaan. Ne ovat joiltakin osin staattisia itseohjautuvia järjestelmiä, mutta eräiltä osin dynaamisia tahdonalaisesti muuttuvia systeemejä. Tarkkaavaisuusjärjestelmä, havainnon muodostus ja työmuistin kapasiteetti ovat keskeisiä tiedollisiin toimintoihin liittyviä tekijöitä. Eriyisesti niiden rajat ja rajojen siirtäminen on ollut viimeaikaisen oppimistutkimuksen polttopisteessä (Saariluoma, 1992; von Wright 1996; Hakkarainen 2000; Hakkarainen ym. 2000). Toisaalta yksilön omilla uskomuksilla ja esikäsitteillä omista mahdollisuuksista ja opittavasta asiasta on oleellinen merkitys tiedon muodostusprosessissa (ks. esim. Pehkonen 1998; Törner 1998).

Kielellisten ilmausten sisältöjä tai merkityksiä tutkitaan semantiikassa. Keskeisiä tekijöitä ovat tällöin ilmausten mielekkyys, merkitys, referenssi, totuus ja tulkinta (Niiniluoto 1984, 208–237). Lauseen ymmärtäminen on lauseelle tarkoitetun sisällön saavuttamista. Tulkintaan tarvitaan konteksti, jonka suhteen tulkinta suoritetaan. Konteksti voi olla joko fyysinen tai sosiaalinen ympäristö tai sitten käsitteellinen viitekehys. Toimintaympäristöt ovat tavallisesti eri ympäristöjen enemmän tai vähemmän painottuneita kombinaatioita. Esimerkiksi teoreettisessa tutkimuksessa – kuten matematiikassa – käsitejärjestelmät dominoivat. Empiirinen tutkimus edellyttää lisäksi fyysistä ympäristöä, ja ryhmätyössä korostuu sosiaalinen aspekti. Ongelmanratkaisutilanteissa kysymysten asettelu, ongelman muotoilu, valikoiva havainnointi ja ratkaisu edellyttävät käsitteellisen viitekehysten ja teorian, jonka puitteissa työskentely tapahtuu. Kontekstiin liittyvät episteemiset ja ontologiset sitoumukset (ks. esim. Tuomela 1983, 34–48) jätetään laajuutensa vuoksi tässä artikkelissa tarkastelujen ulkopuolelle.

Bloomin oppimispsykologisessa takso-

nomiassa tiedollisten tasojen hierarkia on seuraava: tietäminen, ymmärtäminen, soveltaminen, analysoiminen, syntetisoiminen ja arviointi (Bloom ym. 1971). Ausubelilla mielekäs ymmärtävä oppiminen on rutiininomaisen ulkooppimisen vastakohta (Ausubel & Robinson 1969). Jäsentyneen tiedon saavuttaminen voi olla pitkälinen prosessi, joka etenee erilaisten välvaiheiden kautta joskus jopa taantuen (Pirie & Kieren 1994). Nykyisin ymmärtämistutkimus kuuluu uskomustutkimusten piiriin. Viime aikoina kiinnostus ymmärtämisen tutkimiseen on pysynyt vakaana, ja aiheesta ilmestyy vuosittain noin 200 julkaisua (ks. esim. Helmstad 1999; Pehkonen & Törner 1999; Pehkonen 2000).

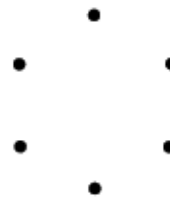
Tämä artikkeli sijoittuu matematiikan ja luonnontieteiden pedagogiikkaan; ymmärtämistä tarkastellaan oppimisen näkökulmasta, mikä ohjaa aiheen käsittelyn valintoja, tulkintoja ja kannanottoja. Käsitelytapa on teoreettinen, mutta työtä on tarkoitus laajentaa vastikään matematiikan opetuksesta kerätyn empiirisen aineiston avulla. Artikkelissa ymmärtämistä tarkastellaan tiedollisena tapahtumana, joka on sidoksissa viitekehyksiin ja konteksteihin. Ymmärtämisen analyysissä selvitetään tulkinnan ehtoja viitekehysten puitteissa. Lopuksi tarkastellaan ymmärtämisen seurauksina selittämistä, jäljittämistä ja ennustamista, jotka tapahtuvat teorioiden, yleistysten tai intentioiden katteessa. Monet oppimisen kannalta tärkeät tekijät, kuten motivaatio ja affektiot jäävät artikkelin ulkopuolelle.

Konteksti ja merkitys

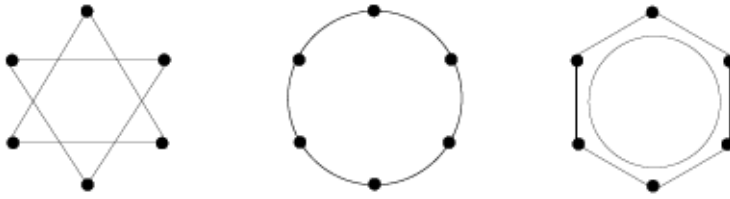
On vaikea löytää täysin eristettyä irrallista tietoa, sillä tieto kytkeytyy menetelmän ja perustelujen kautta johonkin ympäristöön. Joskus kuitenkin kohtaa väit-

teen, josta ei voi edes aavistaa, mihin ympäristöön se sijoittuu: väitteen kohde, attribuuittit tai molemmat ovat vieraita. Viestin vastaanottajan kannalta lause saattaa olla osittain tai kokonaan outo merkkien joukko. Tällä kuulijan kannalta sisältöä vailla olevien merkkien joukolla on voitu tarkoittaa sitä sirpaleista tietoa, josta koulua on usein syytetty. Kysymyksessähän voi olla esittäjän tarkoittamassa mielessä hyvin perusteltu tietoväite, jota kuulija vain ei tavoita vajavaisten taustatietojensa vuoksi. Tällöin esimerkiksi koulua ei voida varsinaisesti syyttää sirpaleisen tiedon jakajaksi, mutta kylläkin aineiston valinnassa tai opetusmenetelmissä voisi olla huomautettavaa. Sirpaleisena voitaisiin pitää tietoa, joka taltioidaan mielekkäinä yksittäisinä tapauskohtaisina väitteinä, mutta joka ei kuitenkaan ole rakentamassa jäsentynyttä struktuuria, jota ymmärretty tieto parhaimmillaan edustaa.

Mitä ovat sitten ne asiat tai asiantilat, joita kielelliset ilmaukset koskevat? Asiantilalla ei tarkoiteta pelkkää objektien joukkoa (kuvio 1), vaan objektien jäsentynyttä joukkoa (kuvio 2). Oliojoukosta on saatu siis asiantiloja, maailman osia, objektien välisten relaatioiden avulla (Wittgenstein 1971, 5). Esittävät kuvatkin ovat asiantiloja (emt., 10).



KUVIO 1. Pisteiden joukko



KUVIO 2. Jäsentyneitä pisteiden joukkoja

Kuviossa 2 on kuvion 1 esittämät pisteet yhdistetty eri tavoin, ja pisteet ovat eri ympäristöjen osia. Kuvion 2 esityksiä voidaan pitää tason osina tai geometrisina kuvioina. Toisaalta kuvio voi symboloida Davidin tähteä (a), atomin elektronikuorta (b) tai bentseenirengasta (c). Pistejoukot symboloivat erilaisia asiantiloja kontekstiansa mukaan. Kukin näistä kuvioista esittää eri osaa maailmassa. Tavoittaakseen kussakin tapauksessa esityksen merkityksen on tunnettava se ympäristö, mihin kuvio kulloinkin viittaa.

Kuvion 1 pistejoukosta ei siis voida puhua asiantilana, eikä se voi olla tietämisen kohteena ilman attribuutteja. Kuvion 2 tapaukset ovat asiantiloja pisteiden keskinäisten yhteyksien kautta, ja niistä tai niiden avulla voidaan esittää mielekkäitä väitteitä. Esimerkiksi kuvion 2 (c) -tapauksessa kemistille avautuu näkymä orgaanisen kemian maailmaan, kun taas kemian tuntemattomalle se jää pelkäksi säännöllisen kuusikulmion sisälle piirretyksi ympyräksi. Toisaalta termin *bentseenirengas* kytkeminen kyseiseen tapaukseen tuo asiantuntijalle mieleen kielellisen symbolin kautta hiilirenkaan ja esimerkiksi joukon sen mahdollisia yhdisteitä, mutta kemian tuntemattomalle termi antaa nimen vain erikoiselle kuviolle.

Näiden esimerkkien avulla on pyritty

osoittamaan, kuinka kiinteä on kontekstin ja yksittäisten asioiden välinen yhteys. Oppimisen kannalta on merkittävää, että opittava aines on relevantissa suhteessa oppijan kognitiiviseen struktuuriin, jolloin oppiminen voi perustua ymmärtämiseen (Ausubel & Robinson 1969, 53). Tällä tarkoitetaan sitä, että oppijalla on jonkinlainen käsitys siitä ympäristöstä, johon hän uusia asioita assimiloii. Oman problematiikkansa muodostaa sitten se, kuinka konteksteja muodostetaan. Optimoituuko oppiminen ennakoijäsennysten (Engeström 1984) tai induktion kautta (Seinelä 1987) vai ehkä niiden kombinaationa? Assimilaatioissa ja akkomodaatioissa oppiminen tukeutuu johonkin oppijalle tuttuun viitekehukseen tai sen muuttamiseen. Uusien perspektiivien tavoittelussa on koeteltava näkemyksellisiä perusteita, ja tällöin voidaan päätyä tiedollisen vallankumouksen kautta uuteen paradigmaan (Kuhn 1994). Eksperteilläkin voi olla omalla alallaan ylivoimaisia vaikeuksia paradigman muutoksiin. Kuhnin mukaan (1994, 213–214) heidän puheensa ja kirjoituksensa vieraassa paradigmassa voivat olla teknisesti moitteettomia, mutta niistä ilmenee, että uutta näkökulmaa ei ole sisäistetty. Edellyttääkö paradigmaattinen muutos luopumista logiikasta ja turvautumista “vapaaseen leikkimiseen” ja osuvaan

arvaamiseen kuten Einstein neuvoo (Pietiläinen 1997, 56)? Tämä tarjoaa pedagogiselle kehittämistyölle melkoisen haasteen.

Viitekehys ja oppiminen

Kuhnin (1994) mukaan ympäristön jäsentäminen edellyttää paradigman. Paradigma on yhteisöllinen asia, joten päästäkseen yhteisön jäseneksi on yksilön päästävä osalliseksi yhteisön paradigmaan. Tämä edellyttää puolestaan kommunikointia ja yhteisymmärrystä, jonka avulla yksilö voi tavoittaa yhteisön muiden jäsenten ajatuksia. Mielekkään kommunikoinnin ehtona on, että jäsenillä on jokin minimimäärä yhteisiä käsityksiä ja että niistä vallitsee edes jonkinasteinen yksimielisyys.

Yksilö jäsentää maailmaa oman henkilökohtaisen käsitejärjestelmänsä varassa. Käsitejärjestelmät ovat jatkuvan muutoksen alaisia, ja ne voivat sisältää erillisiä tai jossakin määrin integroituneita osia. Käsitejärjestelmien sisällä voidaan muodostaa käsitteellisiä viitekehyskiä. Yksilö käsitteellistää maailmaa viitekehysten puitteissa.

Heideggerin hermeneuttisen spiraalin (ks. Kusch 1986, 90) pohjalta voidaan kulttuuriset käsitykset ja viitekehukset jakaa niiden pysyvyyden ja tiedostamisen selkeyden perusteella kolmeen luokkaan: erittäin pysyviin (pohja), pysyviin (perusta) ja vaihteleviin (mallit ja teoria). Erittäin pysyvillä viitekehyksillä on seuraavia ominaisuuksia: itsestään selvyys, ei kyseenalaistusta, usein tiedostamattomia, asettavat mahdollisen rajat. Esimerkkeinä voisivat olla positiiviset kokonaisluvut, aika ja avaruus. Kant piti euklidisen geometrian aksiomia ihmisen havaintokyvyn sisäänrakennettuina piirteinä, joten avaruuden käsittäminen muutoin kuin euklidisena on mahdoton (ks. Niiniluoto 1984, 210). Tosin aika ja avaruus menet-

tivät erikoisasemansa epäeuklidisen geometrian ja suhteellisuusteorian myötä. Pysyviin käsityksiin kuuluu seikkoja, joissa ei tapahdu kovin herkästi muutoksia (Vosniadou 1994). Näitä voisivat olla esimerkiksi ääretön -käsite ja magnetismi. Muutosaltteimpia ovat teoriat ja mallit, jotka on rakennettu kahden edellisen tason perustalle. Tähän luokkaan voidaan sijoittaa esimerkiksi geometria ja kosmiset mallit, joissa on tapahtunut melkoisia muutoksia viimeisen kolmentuhannen vuoden aikana.

Erittäin pysyvä kehys on sikäli erikoisasemassa, että sen varaan voivat rakentua sekä pysyvä että vaihteleva viitekehys. Esimerkiksi jo antiikin aikoina tehdyt tähti-taivaan havainnot ovat "päteviä" vielä nykypäivänäkkin, ja ne voivat saada perustelun muodon erilaisina malleina. Toisaalta mallin asema ja tehtävä voi vaihdella eri tasoilla ja tasojen välillä. Mallia voidaan käyttää asioiden havainnollistamiseen, mittaustulosten tiivistämiseen, se voi olla teorian lähtökohdana tai teoria voi toteutua eri malleissa.

Mielekäs ymmärtävä oppiminen on Ausubelin mukaan assimilaatiota, missä oppija kytkee uutta informaatiota omaan tietojärjestelmänsä (Ausubel & Robinson 1969, 105–129). Assimilaatiossa oppijan tieto lisääntyy, jos hänellä on aineistoon sopiva viitekehys, muutoin sanoma voi jäädä pelkäksi sanahelinäksi tai kaavaröykkiöksi. Festingerin dissonansiteorian (1958) mukaan yksilö ei hevin omaksu järjestelmänsä kanssa ristiriidassa olevaa informaatiota, vaan poimii järjestelmänsä sopivat palaset. Informaatiolla tarkoitetaan tässä tilannesidonnaista praktista tietoa, jonka perustelu ja totuus eivät välttämättä kestä kriittistä tarkastelua. Engeström (1984) korostaa ennakoivan orientaation merkitystä oppimisessa.

Ymmärtämisen tutkimisessa on kysymys maailmaa jäsentävien tiedollisten jär-

jestelmien ja niiden dynaamisten ehtojen selvittämisestä. Koska oppiminen on muutosta, polttopisteeseen nousee muutosten työläys käsitteellisissä viitekehyksissä. Malleja voi muuttaa, periaatteiden omaksuminen on jo vaikeampaa ja perusteisiin puuttuminen on työlästä. Perusteita tai lähtökohtia on vaikea muuttaa, koska tukena tai taustalla ei ole viitekehystä tai näkemystä asiasta.

Ymmärtäminen ja merkit

Ymmärtäminen on aina suhteellinen tapahtuma. Yksittäinen asia tai symboli on suhteessa johonkin kontekstiin: luontoon, sosiaaliseen ympäristöön tai käsitteelliseen viitekehykseen. Suhteuttaminen on tulkintaa, jonka osia ovat käsitejärjestelmät ja näkökulmat. Lauseen merkityksen tavoittamiseen voidaan tarvita vielä alakohtaista menetelmätietoa.

Merkityksen tavoittamiseen liittyvät aina merkitysten kantajat, merkit. Merkit voidaan jaotella luonnollisiin ja kulttuuriin. Edellisiin kuuluvat kausaaliketjut ja samankaltaisuudet, kuten savu tulen merkinä ja lähteen kuvajainen. Kulttuurimerkin kantajat ovat sovittuja merkkejä kuten kirjaimet tai sotilaspuku. Termi *merkitys* saa erilaisia sisältöjä käyttöyhteydestä riippuen (Ogden & Richards 1923). Ymmärtämisprosessissa ovat kontekstuaaliset seikat oleellisia, koska lauseen merkitys tai sisältö on mahdollisten asiantilojen tai maailmojen kokoelma (Niiniluoto 1984, 131).

Peirceläisen perinteen mukaan kulttuuriset merkit ovat esittäviä: ne esittävät jotakin jollekin jossakin suhteessa (Rantala 1994, 164). Joihinkin merkkeihin liittyy selvästi kaksoisluonne. Esimerkiksi sähkö- ja lämpömittarit toimivat luonnolakiin mukaan, mutta niiden asteikot ovat sopimuksenvaraisia. Tällöin mittarin

lukemalla on sekä merkki- että symbolifunktion asema. Yksittäinen mittarihavainto ei enää olekaan pelkästään teoriapitoinen, vaan siihen voi kytkeytyä instrumentaatiota ja erilaisia käytänteitä (Chalmers 1990; Kuhn 1994). Mittarilukeman voi tulkita ja käsittää hyvin monella eri tavalla niin teoreettisesti kuin käytännön tarpeisiin nähden. Tässä mielessä voivat noviisin ja ekspertin havainnot erota perusteellisesti toisistaan. Vanhan sanonnan mukaan toinen voi puhua metsästä, kun toinen näkee vain puita. Ekspertin havainto on koko tiedeyhteisön tradition läpätunkema, kun taas noviisin havainto on vain mittarin osoittimen lukema asteikolla. Tilanteista ja intresseistä riippuen ekspertti voi vaivatta operoida saman teorian kätteessä eri ympäristöissä. On toki tilanteita kuten pakkasaamuna auton käynnistys, jolloin ekspertti ja noviisi saavat riittävästi informaatiota pakkasmittarin asteikon lukemasta. Kokemuksen kulttuurista välittyneisyyttä on korostanut jo Dewey vuonna 1925 teoksessaan *Experience and Nature*.

Tieto ja ymmärtämisen ehdot

Tieto ja tietäminen luokitellaan usein sen perusteella, kuinka väite saa perustelunsa. Tieto voi ilmetä tekemisen taitona, osaamisena tai tuntemisena, jolloin kysymyksessä on proseduraalinen "knowing how" -tieto. Deklaratiivinen tieto puolestaan voidaan ilmaista kielellisesti ja väitteet ovat "knowing that" -muotoa (Niiniluoto 1984, 137). Jako ei ole kovin selvärajainen ja toimintojen kuvauksessa tiedon lajit voivat kietoutua toisiinsa monin eri tavoin. Esimerkiksi kirvesmiehen ei tarvitse tietää Pythagoraasta tai hänen nimeään kantavasta väitteestä mitään, mutta hän saa nurkat suorakulmaisiksi käyttä-

mällä mittauksessaan sääntöä 3,4,5. Lisäksi rakentaja voi tietää väitteen yleisen muodon $a^2 + b^2 = c^2$, joka antaa kirvesmiehen sääntöön sovellettuna yhtälön: $9 + 16 = 25$. Edelleen hän on voinut vakuuttua käytännön kokemuksen perusteella induktiivisena yleistyksenä, että lause on pätevä. Varmuuden vakuudeksi hän voi vielä tutustua tasogeometriaan, jolloin hän saa väitteelle loogisen perustelun. Esimerkissä ensimmäinen tapaus on selkeästi osaamistietoa tekemisen taitona. Kahdessa jälkimmäisessä tapauksessa on kysymys deklaraatiivisesta tiedosta, mutta niihin kytkeytyy lisäksi taitotietoa, osaamista perustella väitettä. Jos osattaisiin lisäksi analysoida todistustapahtuma jonkin yleisemmän teorian puitteissa, olisi kyseessä jälleen deklaraatiivinen tieto mutta toisasteisena edelliseen nähden.

Kielellisten ilmaisujen ymmärtäminen edellyttää mielekkäiden väitteiden olemassaoloa ja subjektin elävää suhdetta niihin. Tiivistetysti ymmärtämisen analyysi voidaan ilmaista seuraavien ehtojen avulla:

Henkilö S ymmärtää tietoväittämän p, jos ja vain jos

- (i) S kokee p:n mielekkääksi
- (ii) S tuntee p:n viitekehysten T
- (iii) S pystyy tulkitsemaan p:n T:ssä
- (iv) S on oikeutetusti vakuuttunut

p:n tulkinnasta T:ssä.

Ylläesitettyihin ymmärtämisen ehtoihin sisältyy tiedollinen ja emotionaalinen komponentti. Kielellisen ilmaisun mielekkyyden edellytyksenä on, että ilmaisulla on merkitys (i) (Niiniluoto 1984, 130–131). Mielekkäällä väitteellä on kohde, johon ehdotettujen attribuuttien on liityttävä adekvaatilla tavalla (ii). Yksilön kannalta mielekkyys edellyttää vielä, että se on relevantissa suhteessa hänen kognitiiviseen struktuuriinsa (i) – (iii) (Ausubel & Robinson 1969, 53). Ymmärtämisen ehtoihin kuuluu eri tiedon lajeja: automatisoitunutta kontekstuaalista tietoa (ii), tai-

totietoa tulkintaa varten (iii) sekä menetelmätietoa väitteen oikeutuksen perusteluihin (iv). Automatisoitumisen ehto perustuu muistin rakenteeseen ja toimintaan. Käsitejärjestelmien joustava hyödyntäminen työmuistissa edellyttää helposti saatavilla olevia laajoja mieltämysyksiköitä (Saariluoma 1992). Oikeutus on episteeminen kriteeri ja edellyttää internalismin mukaisesti, että subjekti pystyy arvioimaan asianmukaisen evidenssin luotettavuutta (Lammenranta 1993, 181). Vakuuttuneisuuden takeena ovat lopulta emootiot, vakuuttuneisuuden tunne, vaikkakin joskus heikoin perustein (iv).

Selittäminen teorian avulla

Tieteellisin menetelmin tuotettu teoreettinen tieto on oikein ymmärrettyinä arvokasta, koska se informatiivisena tyydyttää inhimillistä uteliaisuutta ja voi olla hyödyllinen selitys- ja ennustekykynsä vuoksi. Selittäminen tapahtuu tieteellisen teorian puitteissa Hempelin mallissa (1966) siten, että yksittäinen ilmiö tai laki upotetaan yleisiin lakeihin:

Lait
Alkuehdot

Johtopäätös

Selittäminen edellyttää siis selitettävän ilmiön lainalaisuuden tuntemista ja reunaehtojen tietämistä. Tämän jälkeen selitettävä tapahtuma voidaan johtaa loogisesti alkuehdoista. Esimerkiksi kun tunnetaan kappaleeseen vaikuttavat ulkoiset voimat ja alkuehdot, kappaleen rata voidaan laskea Newtonin II:n lain mukaan. Päätelyn ymmärtämisen oleellisena osana on tiedon menetelmä, joka vaihtelee tieteen alasta toiseen. Feynmanin mukaan (1999, 130–132) fysiikan lakien tuntemus ei johda välttämättä laajaan ymmär-

tämykseen tai edes merkittävien asioiden ymmärtämiseen.

Intentionaaliseen toimintaan sovelletuna Hempelin malli (emt.) saa seuraavan muodon (von Wright 1971, 101):

X aikoo saada tapahtuman tai asiantilan E toteutumaan

X ajattelee, että ellei hän tee tekoa A nyt, hän ei saavuta E:tä

X ryhtyy tekemään A:ta, ellei häntä esitetä

Tässä on kysymys tavoitteellisen toiminnan tulkitsemisesta, toiminnan ymmärtämisestä. Kaavioista edellinen antaa vastauksen miksi-kysymyksiin ja jälkimmäinen mitä varten -kysymyksiin. Molemmissa tapauksissa edellytetään tunnettavaksi teoria tai käsitteellinen viitekehys, jonka puitteissa selitys annetaan. Selittäminen, jäljittäminen ja ennustaminen ovat rakenteeltaan samanlaisia. Jäljittämisessä ja ennustamisessa kulkee päättelyketju käänteisessä järjestyksessä kuin selittämisessä. Selittämisessä johtopäätös tunnetaan jo etukäteen, kun taas jäljittämisessä ja ennustamisessa on alkuehdot ja lait tunnettava ensin. Ymmärtämistä voidaan pitää jäljittämisen, selittämisen ja ennustamisen välttämättömänä, mutta ei riittävänä ehtona.

Yhteenveto

Yksilö rakentaa maailmankuvaansa tarjolla olevan informaation varassa. Informaatiolähteinä ovat luonto, sosiaalinen ympäristö ja kulttuurituotteet. Koska rajatuillakin alueilla tarjolla olevan tiedon määrä on liian suuri hallittavaksi, on kehitettävä menetelmiä tarvittavan ja tarkoituksemukaisen tiedon valintaa ja hallintaa varten. Tässä artikkelissa on pyritty selvittämään joitakin jäsentävän hahmotuksen te-

kijöitä ja ehtoja. Artikkelin ulkopuolelle jäävät muun muassa ymmärtämiseen liittyvät affektiot, motivaatiotekijät ja hiljainen tieto (tacit knowledge), joiden merkitystä tuskin voi vähätellä oppimisessa.

Tiedollisen hahmotuksen taustalla ovat käsitteet, jotka ovat ajattelun välineitä ja joiden avulla asioita saadaan "käsiin" eli ymmärretään. Käsitejärjestelmien puitteissa voidaan rakentaa viitekehyksiä, malleja ja teorioita kiinnostavien asioiden kuvailuun. Informaatiota saadaan ja välitetään merkeillä, joiden merkitys määrittyy niiden asemasta kontekstiinsa ja on sopimuksenvarainen. Kielellisen viestin sisällön ymmärtäminen edellyttää yksilöltä taustatietoa, väitteeseen kuuluvaa menetelmätietoa sekä taitotietoa ilmaisujen tulkintaa varten. Ymmärtämisen takeena yksilö pitää vakuuttuneisuuden kokemusta, tosin joskus hatarin perustein.

Lähteet

- Ausubel, D. & Robinson, F. 1969. School learning. London: Holt, Rinehart and Wilson.
- Bloom, B., Hastings, J. & Maudus, G. 1971. Handbook of formative and summative evaluation of student learning. New York: McGraw-Hill.
- Brunila, M. 1997. Richard Feynmanin ihmeellinen elämä – todella upeaa. Tähdet ja avaruus 5, 28–30.
- Chalmers, A. 1990. Science and its Fabrication. Bristol: Open University Press.
- Deutsch, D. 1997. Todellisuuden rakenne. (Suomentaja Kimmo Pietiläinen.) Vaasa: Terra Cognita.
- Dewey, J. 1958. (1925) Experience and Nature. New York: Dower.
- Engeström, Y. 1984. Orientointi opetuksessa. Valtion painatuskeskus. Julkaisusarja B 29.
- Festinger, L. 1958. The motivation effect of cognitive dissonance. Teoksessa E. Lindsay (toim.) Assessment of human motives. New York: Grove Press.
- Feynman, R. 1999. Fysiikan lain luonne. (Suomentaja Kimmo Pietiläinen.) Helsinki: Ursula.
- Hakkarainen, K., Lonka, K. & Lipponen, L. 2000. Tutkiva oppiminen: Älykkään toiminnan rajat ja niiden ylittäminen. Porvoo: WSOY.

- Hakkarainen, K. 2000. Oppiminen osallistumisen prosessina. *Aikuiskasvatus* 20(2), 84–98.
- Helmstad, G. 1999. Understanding of understandings. *Göteborg studies. Educational series* 134.
- Hempel, C. 1966. *Philosophy of natural science*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- Hume, D. 1938. Tutkimuksia inhimillisestä ymmärryksestä. (Suomentaja Eino Kaila.) Helsinki: WSOY.
- Kant, I. 1997. *Prolegomena*. (Suomentaja Vesa Oittinen.) Helsinki: Gummerus.
- Kuhn, T. 1994. Tieteellisen vallankumouksen rakenne. (Suomentaja Kimmo Pietiläinen.) Juva: WSOY.
- Kusch, M. 1986. Ymmärtämisen haasteet. Jyväskylä: Pohjoinen.
- Lammenranta, M. 1993. *Tietoteoria*. Tampere: Tammer-Paino.
- Niiniluoto, I. 1984. Johdatus tieteenfilosofiaan. Keuruu: Otava.
- Ogden, C. & Richards, I. 1923. *The meaning of meaning*. London: Routledge & Keagan.
- Pehkonen, E. 1998. Matematiikan professorien käsityksiä ja mielikuvia koulumatematiikasta. Teoksessa J. Leinonen (toim.) *Teorian ja käytännön vuorovaikutus ainedidaktiikassa*. Lapin yliopisto. *Kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisusarja C. Katsauksia ja puheenvuoroja* 17, 155–170.
- Pehkonen, E. 2000. Ymmärtäminen matematiikan opetuksessa. *Kasvatus* 4(31), 375–381.
- Pehkonen, E. & Törner, G. (toim.) 1999. *Mathematical beliefs and their impact on teaching and learning of mathematics*. Proceedings of the Workshop in Oberwolfach November 21–27 1999. Duisburg: Gerhard Mercator Universität.
- Pietiläinen, K. 1997. Mikä on villakoiran ydin? 50 tieteen mysteerää. Vaasa: Terra Cognita.
- Pirie, S. & Kieren, T. 1994. Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics* 26 (2–3), 165–190.
- Rantala, V. 1994. Merkitys semiotiikassa. Teoksessa S. Heinämaa (toim.) *Merkitys*. Tampereen yliopisto. *Filosofisia tutkimuksia* 45, 160–175.
- Rauhala, L. 1990. Humanistinen psykologia. Helsinki: Yliopistopaino.
- Rauhala, L. 1997. Täynnän ja sen oman struktuurin ehdoilla. *Niin & Näin* 1, 64–68.
- Saariluoma, P. 1992. *Taitavan ajattelun psykologia*. Helsinki: Otava.
- Seinälä, K. 1987. Kokeellis-induktiivisen menetelmän toimivuus lukion ensimmäisen luokan fyisiikan opetuksessa. Piaget'n teoriaan perustuva tutkimus. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos. *Tutkimuksia* 47.
- Tuomela, R. 1983. *Tiede, toiminta ja todellisuus*. Jyväskylä: Gaudeamus.
- Törner, G. 1998. *Mathematical beliefs and their impact on mathematics teaching and learning of mathematics*. Teoksessa J. Leinonen (toim.) *Teorian ja käytännön vuorovaikutus ainedidaktiikassa*. Lapin yliopisto. *Kasvatustieteiden tiedekunnan julkaisusarja C. Katsauksia ja puheenvuoroja* 17, 221–246.
- Wittgenstein, L. 1971. *Loogis-filosofinen tutkielma*. (Suomentaja Heikki Nyman.) Helsinki: WSOY.
- von Wright, G. 1971. *Explanation and Understanding*. Ithaca: Cornell University Press.
- von Wright, J. 1996. Oppiminen selviytymiskeinona. *Psykologia* 31, 351–358.
- Vosniadou, S. 1994. Capturing and modelling the process of conceptual change. *Learning and Instruction* 4, 45–69.

B



Jorma Leinonen

Käsite ja ymmärtäminen

LEINONEN, JORMA. 2003. KÄSITE JA YMMÄRTÄMINEN. *Kasvatus 34 (1)*, 56–65. — Nykykoulussa opetus tapahtuu suurelta osin kielen välityksellä. Kielellisen sanoman tavoittaminen tai asian käsittäminen tapahtuu ajatuksen käsitteellisin välinein. Käsitteet ovat ajattelun, tietämisen ja oppimisen keskeisiä tekijöitä. Opiskelun suuntaamista ja tarkkaavaisuuden fokusointia käsitteisiin vaikeuttaa käsitteen monimerkityksisyys. Käsitteitä voidaan pitää asiayhteydestä riippuen ainakin teoreettisina entiteetteinä, attribuutteina, piirteiden tai kokemusten kimppuina tai pelkästään kielellisinä ilmaisuina. Monimerkityksisyydestä johtuen käsitteen määrittely on hankalaa. Tässä kirjoituksessa on pyritty löytämään oppimista ja sen tutkimusta palveleva käsitteen luonnehdinta. Käsitteitä voidaan pitää Popperin maailman 3 olioina, jotka ovat ihmismielen tuotteita mutta joilla on itsenäinen asema kulttuurin kentässä. Käsite omaksutaan oppimalla ja sen omaaminen on tietoisuutta attribuutista. Tämä luonnehdinta viittaa mieleen ja kieleen, oppimisprosessin keskukseen ja välineeseen. Attribuutit ovat maailmassa, josta ne tavoitamme aistien, mittavälineiden, teorioiden ja ajattelun avulla.

Asiasanat: käsite, konteksti, tieto, tulkinta, ymmärtäminen

Johdanto

Ajattelu, kieli ja ymmärtäminen ovat monin tavoin kietoutuneet toisiinsa, mutta ne ovat myös kiinteästi kytköksissä oppimiseen. Nykykoulussa opetus perustuu valtaosiltaan kielelliseen toimintaan kuten lukemiseen, kirjoittamiseen, puhumiseen, kuuntelemiseen, selittämiseen jne. Marlandin mukaan (1982) koulun ongelma on puheen ja kirjoituksen, tekstin, ongel-

ma. Oppiminen kielen kautta edellyttää kuitenkin ymmärtämistä, sanoman sisällön tavoittamista. Sisältö voidaan saavuttaa ajattelun käsitteellisin välinein, kuten Ahlman kirjoittaa (1976). Peruskoulun ja lukion valtakunnallisten opetussuunnitelmien perusteet korostavat käsitteen merkitystä niin ajattelun kehittämisessä kuin tiedonmuodostuksessaakin (Peruskoulun opetussuunnitelman... 1994a; Lukion

opetussuunnitelman... 1994b; Peruskoulun opetussuunnitelman... 2002a; Lukion opetussuunnitelman perusteiden... 2002b). Koska käsitteet näyttävät olevan oppimisen ja opettamisen keskeisiä elementtejä, halutaan tässä kirjoituksessa tarkastella asiaa lähemmin.

Käsitteistä puhuminen ja niistä kirjoittaminen on sikäli hankalaa, että jo keskustelu käsitteistä edellyttää käsitteitä. Toiseksi ei ole tarjolla sellaista superperspektiiviä, jolla päästäisiin käsitteistä, olioista ja symboleista riippumattomien ontologisten ja episteemisten sitoumusten ulkopuolelle. Perspektiiveistä vapaa puhe olisi taas puhdasta sekoilua. Käsitteitä – ajattelun, kommunikoinnin ja oppimisen keskeisinä tekijöinä – ei kuitenkaan voi ohittaa epämääräisyyteen tai hankaluuksiin vedoten. Perspektiiviongelmasta johtuen tässä kirjoituksessa joudutaan vaihtamaan näkökulmaa tavan takaa. Lukijaa pyydetään kuitenkin kiinnittämään näkökulmien vaihtumisesta huolimatta huomiota niihin seikkoihin, jotka auttavat selvittämään käsitettä ja sen asemaa oppimisessa.

Tämä kirjoitus on osana ainedidaktista uskomus- ja ymmärtämistutkimusta, mikä piirissä on nykyään vilkasta tutkimustoimintaa. Esimerkkinä mainittakoon Turun yliopiston 24.–25.6.2002 järjestämä seminaari *Mathematical understanding*, jossa koti- ja ulkomaisten alustajien joukossa oli muun muassa professori Anna Sfard Haifan yliopistosta. Sfard on työskennellyt ymmärtämistutkimuksen parissa parisenkymmentä vuotta. Tässä artikkelissa kartoitetaan käsitteen käyttöä, kiinnitetään huomiota kielellisen ilmauksen merkitykseen ja pyritään löytämään pedagogisen tutkimuksen ja sovellutusten kannalta käyttökelpoinen käsitteen määrittäminen. Olen kirjoittanut aikaisemmin artikkelin (Leinonen 2002) ymmärtämisen kontekstuaalisista tekijöistä otsakkeella *Ymmärtä-*

minen – jäsentynyttä tietämistä, jota pyrin tällä artikkelilla täydentämään ja laajentamaan.

Käsitteet

Käsitteet ajattelun välineinä

Käsitteet ovat ajattelun ja tietämisen kulmakiviä. Ajattelu voi olla predikatiivista (kissoilla on neljä jalkaa) tai reifioivaa (kolme ja viisi ilmaisevat lukumääriä). Käsitteen määrittely on vaikeaa, mutta luonnehdintoja ja tehtäviä käsitteelle voi löytää. Ahlmanin (1976, 161–168) mukaan käsitteet ovat ajattelun välineitä. Seppälä (1980, 10) pitää käsitettä kokemusten kimpuna ja Saariluoma (1990, 81–82) olioiden tunnuspiirteinä. Kivisen (1994) mukaan yleiskäsitteet ovat tietoisuuksia attribuuteista. Edelliset eivät ole käsitteen määrittelyä, vaan osoittavat suuntaa, mistä aihetta voi lähestyä. Käsitteet ovat myös oppimisen välineitä ja kohteita, kuten käy ilmi Silfverbergin väitöskirjasta (1999) “Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrisen käsitetieto”. Kivinen (1994) viittaa tietoisuuteen, joka on syvällinen perustekijä niin humanistisessa psykologiassa (Rauhala 1990), neuropsykologiassa (Damasio 2000) kuin kognitiotieteessäkin (Hautamäki, 1989). Fodorin mukaan (2001, 8) tietoisuudesta on vaikea tehdä normaalitiedettä, koska sen selittämiseen ei ole teoriaa. Siispä käsitteen määrittelyn sijaan on tyydyttävä sen eksplisiittiseen analyysiin.

Käsitteet voidaan jaotella singulaari- ja yleiskäsitteisiin. Singulaarikäsitteet kytkeytyvät yksilöihin ja yleiskäsitteet luokkiin. Edellisiin kuuluu esimerkiksi Väli-meri ja jälkimmäisiin lukujen jaollisuus. Tässä artikkelissa tarkoitetaan käsitteellä pääsääntöisesti yleiskäsitettä. Yleinen viit-

taa tavallisesti olioiden yhteisiin piirteisiin, mutta myös (Ahlman 1976, 166–167) käsitteen yleiseen ja laajaan käyttöön. Käsitteillä voidaan tarkoittaa attribuuttien ajatuksellisia vasteita tai semantiikassa (Niiniluoto 1984, 120) kielellisten ilmaisujen intensioita. Attribuutti on yhteisnimitys ominaisuuksille ja relaatioille. Nominatit, verbit ja prepositiot ilmaisevat attribuutteja. Käsitteitä voidaan käyttää myös luokitteluperusteina, jolloin ne olioiden yhteisinä piirteinä rajaavat olioluokkia. Esimerkiksi kirahvit ja luonnolliset luvut kuuluvat kielellisten ilmausten kirahvi ja luonnollinen luku ekstensioihin, jotka ovat alistaisia vastaavien ilmausten intensioille (emt. 121).

Oliot, attribuutit ja käsitteet ovat erotamaton kolmikko. Ajatellaan, että maailma muodostuu olioista, joilla on ominaisuuksia ja relaatioita. Subjekti hahmottaa maailmasta kuvan käsitteiden ja käsitejärjestelmien avulla. Ominaisuudet ja relaatiot kytkeytyvät toisiinsa monin tavoin. Relaatioilla voi olla ominaisuuksia kuten symmetrisyys tai transitiivisuus¹. Ominaisuudet voivat olla toisiinsa relaatiossa ja sitä kautta muodostaa yleisemmän ominaisuuden. Esimerkiksi spektri muodostuu yksittäisistä väreistä, jotka ovat tietystä suhteesta toisiinsa. Toisaalta värit voidaan ilmaista aallonpituuksien ja taajuuksien avulla, jotka ovat fysiikan suureita. Kokemuskvaliteetteina värit eivät ole tarkkarajaisia. Värin vaihtuminen toiseksi riippuu lukuisasta määrästä subjektiivisia ja ulkoisia tekijöitä. Fysiikassa sitä vastoin värin erottuminen riippuu vain havaintolaitteistosta, ja väriskaistan leveys on sopimuksenvarainen asia. Vaikka väri ei ole fysiikan suure, se on kuitenkin säilyttänyt itsenäisen asemansa värien fenomenologiassa teoriassa. Siitä huolimatta, että värit voidaan ilmaista mittarilukemina, ei kokemuskvaliteetti ole sama kuin mittarilukema. Aallonpituuksien prosessoimiseen

kone ei tarvitse värikokemuksia, eikä aallonpituuksien luetteleminen välttämättä syvennä värikokemuksia.

Aika ajoin on käyty enemmän tai vähemmän vakavaa keskustelua kvaliteettien ja kvantiteettien erosta tai kvaliteettien redusoitumisesta kvantiteetteihin. Kuten edellä kävi ilmi, on kvaliteetteja, jotka voidaan palauttaa matemaattisten struktuurien kautta kvantiteeteiksi, mutta on tyystin eri asia kokemuskvaliteetin siirtäminen näihin struktuureihin. Lopultakin kysymys palautuu tietoisuuden problematiikkaan.

Ovatko käsitteet attribuutteja?

Oliot, attribuutit ja käsitteet eivät ole ainoastaan kietoutuneet toisiinsa vaan muuttuvat toisikseen tarkastelutavasta riippuen. Olioilla tarkoitetaan erilaisia huomion kohteina mahdollisia objekteja, objektilajeja, tila- ja tapahtumatyyppisiä tai kausaalirakenteita. Olioita ovat klassisessa mielessä esimerkiksi materiaaliset kappaleet, mutta modernin fysiikan mukaan materia voidaan ymmärtää myös värähtelevänä kenttänä. Ominaisuuksista ja relaatioista voidaan puhua olemassa olevina olioina, esimerkiksi luokkiin kuuluvina elementteinä. Puhutaan myös primitiivisistä ja johdetuista olioista. Eukleideen geometriassa piste ja suora ovat primitiivejä, mutta ympyrä saadaan määrittelyn avulla primitiiveistä. Lukuja ja lukujärjestelmiä voidaan pitää käsitteinä, mutta myös tarkasteltavina olioina tai oliojärjestelminä. Oliolla ei ole ainoastaan ominaisuuksia, vaan sillä on myös käsite tai useita

¹ Esimerkiksi olla veli on symmetrinen relaatio: Jos Lasse on Kallen veli, on Kalle Lassen veli. Luonnollisten lukujen joukossa olla suurempi kuin on transitiivinen relaatio. Jos a b ja b c, niin a c.

käsitteitä. Puhutaan pallon käsitteestä, mutta matematiikassa analysoidaan pallon ominaisuuksia. Vaikka olioilla olisikin käsitteensä, niin käänteisviittaus ei välttämättä ole ongelmaton. Minkä olion käsitteitä ovat esimerkiksi opintoviikko tai va-paus?

Fysiikassa suureet edustavat käyttöilanteesta riippuen attribuutteja tai käsitteitä. Empiirisissä yhteyksissä suureet kuuluvat ominaisuuksien luokkaan ja ovat ominaisuuksien kvantitatiivisia vastineita (Kurki-Suonio & Kurki-Suonio 1994, 164). Teoreettisina entiteetteinä suureilla tarkoitetaan käsitteitä (Kangas 1981, 12; Kurki-Suonio & Kurki-Suonio 1994, 141). Matematiikassa puhutaan ominaisuuksista ja relaatioista. Esimerkiksi vaihdannaisuus on yhteenlaskun ominaisuus, ja joukon kuuluminen toiseen joukkoon ilmoittaa joukkojen välisen relaation. Attribuutit eivät kuitenkaan siirry sellaiseen kohteista ajatuksiin, vaan ajattelu operoi käsitteillä. Käsitteiden ei tarvitse epikurolaisittain olla attribuuttien kopioita, jonkinlaista ajatuksellista vastaavuutta kylläkin edellytetään. Kiusauksena on määritellä käsite attribuuttien avulla. Tämä ei kuitenkaan käy, koska kyseessä olisi kategorian ylitys: attribuutti ja sen ajatuksellinen vaste edustavat eri kategorioita. Sama koskee piirteitä ja kokemuksia. Opetuksen kannalta mielenkiintoisia olisivat siirtymäsäännöt kategorialta toiselle, mutta ainakaan Stepinin (1983, 34) tai Seppälän (1980, 10) empiristiset tapailut eivät näytä vakuuttavilta. Molemmissa lähtökohtana on aistimuskokemus ja tuloksena käsite, mutta välittävä kytkeytyminen jätetään avoimeksi.

Mitkä ovat ne tunnusmerkit, joiden avulla käsitteiden omaaminen voidaan tunnistaa? Miten tunnistamis- tai luokittelukyvyt liittyvät käsitteisiin? Vaikka tunnistamis- ja luokittelukyky edellyttäisikin käsitteiden omaamista, eivät käsit-

teet silti ole valmiuksia tai kykyjä. Tästä huolimatta tunnistamis- ja luokitteluvälmiuksien taustalla ajatellaan olevan käsitteitä. Tämä on empiirisen tutkimuksen identifioimisongelma, johon Aaltola (1989, 20–28) kiinnittää erityistä huomiota.

Käsitteen ja attribuutin samaistaminen osoittaa usein säästäväistä kielenkäyttöä. Samaistaminen on lukijan tai kuulijan kannalta hyväksyttävää, varsinkin jos asia tuodaan julki. Tällöin olisi tietysti selvyyden vuoksi suositeltavaa, että pysyttäisiin valitulla linjalla ja käytettäisiin termistöä johdonmukaisesti. Kommunikointiongelmia syntyy vasta sitten, kun kuulija ei tunne aihealueen paradigmaattisia sitoumuksia. Hän ei välttämättä ole tietoinen niistä attribuuteista, joita puhuja tarkoittaa ilmaisuillaan. Kun kuulijalla ei ole tarvittavia käsitteitä käytössään, hän ei tavoita sanomaa eikä hän niin muodoin *ymmärrä* puhetta. Käsitteillä on tällöin välittävä tehtävä subjektin jäsentäessä maailmaa. Pedagogisista syistä ei näin ollen tulisi samaistaa käsitteitä ja attribuutteja. Siispä Ahlmanin (1976, 141–168) luonnehdinta käsitteestä kollektiivisena ajatusvälineenä näyttää lupaavalta, kun lisätään vielä, että käsitteen omaaminen on tietoisuutta attribuutista. Kullakin erityisalueella voidaan kommunikoida kohdealueesta ja sen attribuuteista käsitteiden välityksellä. Tällöin käsitteitä voidaan pitää Popperin maailman 3 kulttuurisina olioina (ks. Niiniluoto 1984, 128), joita oppimisessa omaksutaan.

Formaali ja informaali tieto

Olioiden olemassaolokysymykset kuuluvat ontologian piiriin, joka on filosofian osa-alue. Olemassaolositoumukset kuuluvat tieteenalaa hallitsevaan paradigmaan ja määrittävät enemmän tai vähemmän implisiittisinä kulloistakin näkökulmaa. Eri-

tyistieteissä on kussakin omat sitoumuksensa, joiden kyseenalaistaminen ei kuulu kuhnilaisen normaalitieteen piiriin (Kuhn 1994). Maantieteilijä ei kyseenalaista järvien, jokien ja vuorten olemassaoloa, vaan tutkii näiden muodostelmien pituuksia, korkeuksia ja syntymekanismia. Erityistieteilijä kuvailee kohdealuettaan tradition mukaisesti attribuuttien avulla ikään kuin hänellä olisi suora kontakti universaaleihin. Näin hän tekee siitä riippumatta, onko hän tietoinen ontologisista tai epistemologisista sitoumuksistaan vai ei.

Näyttää siltä, että on hyväksyttävä aistein tavoitettavat aineellisen maailman oliot ja vain ajatuksen avulla tavoitettava ideoiden maailma. Näiden kahden maailman silloitus tapahtuu empiristisen perinteen mukaan aistihavainnon abstrahoinnin kautta idealisoituihin olioisiin tai platonilaisittain deduktion avulla ideaaliolioista aistimaailmaan. Pirie & Kierenin oppimisen prosessimallissa (1994) neljä ensimmäistä ajattelun tasoa edustavat empiiristä ajattelua ja jälkimmäiset neljä formaalista ajattelua. Empiirinen ajattelu kohdistuu havainto- ja mielikuviin, formaalisen ajattelun kohteet ovat intuitiivisia. Formaaliin ajatteluun siirtyminen on pikemminkin sisältöihin ja perusteluihin kuin prosesseihin liittyvä kysymys. Päätelyn, päätöksenteon, ongelmanratkaisun, tarkkaavaisuuden tai muistamisen prosesseissa tuskin tapahtuu periaatteellisia muutoksia, vaikka kohteet ja perusteet muuttuvatkin.

Tieto voidaan jakaa sisältöön perustuen formaaliin ja informaaliin. Matemaatiikka ja reaali-tieteet edustavat informaalia tietoa siinä mielessä, että niillä molemmilla on omat tutkimuskohteensa. Matemaatiikassa tutkitaan matemaattisia ideaalistruktuureja ja reaali-tieteissä reaali-kohteita. Formaalia tietoa edustaa nyt formaali logiikka, jonka tehtäväkenttään kuuluu muodollinen päättely, päättely ilman si-

sältöjä. Onhan tietysti mahdollista, että informaali viittaa reaali-maailman informaatiiviseen sisältöön, jolloin matemaatiikka ja muodollinen logiikka ovat formaaleja luonnontieteisiin nähden. Informaalilla voidaan vielä tarkoittaa arkiajattelua tai hiljaista tietoa. Termi formaali saa erilaisia kontekstista riippuvia vivahteita. Piagetilla formaali viittanee Kantin ajattelun kategorioihin, käsitteisiin.

Pirie & Kierenin mallissa (emt.) formaalin ajattelun sisältöjen lähtökohtana on jonkinlainen karkea ja epämääräinen havaintokuva, josta eliminaation, täydennyksen ja yleistyksen kautta vaiheittain päästään ideaalistruktuureihin. Kailan mukaan (1939, 20–24) ekonomia näyttölee keskeistä osaa abstraktiossa, joka suosii yksinkertaista monimutkaisen sijaan. Fodorilla (2001, 13) prototyypin edustaa välivaihetta käsitteenmuodostuksessa. Fodor pitää prototyypin tietyn käsitteen alaan kuuluvana erityistapauksena, jonka mieli oppii ja kytkee ”jollakin tavalla” käsitteeseen. Voidaan ajatella, että aluksi on yksi esimerkkitapaus ja esimerkkien lisääntyessä prototyypin kehittyä joko stokastisena tai edustavan tyyppin valikoitumisena. Edelleen käsitteet muodostavat käsitejärjestelmiä, jotka voivat taltioitua muistiin semanttisiksi verkoiksi. Muisti- ja havaintotutkimukset tukevat tätä hypoteesia (ks. Saariluoma 1990, 88). Verkkojen kytkemät voivat olla assosiativisia tai loogisia. Verkot voivat olla sanallisia tai kuvallisia (Paivio 1986). Fodor pitää ajattelumalleissaan kielellisiä representaatioita ensisijaisina (Fodor 2001). Semanttisilla verkoilla käsittekarttoina on pedagogista käyttöä ainakin oppiaineiden jäsentämisessä, muistamisessa ja jäsenyyden arvioinnissa. Fodorin mukaan oppiminen ei pääsääntöisesti noudata käsitteiden loogista rakennetta, vaan käsitteet opitaan useimmiten atomistisesti (emt. 13). Vaikka hevoset ovatkin eläimiä, ne tuskin mää-

räävät yleiskäsitteiden hevonen ja eläin oppimisjärjestystä. Olioiden aihepiiriin kuuluvat läheisesti vielä asiat ja asiantilat (ks. Leinonen 2002). Ovathan asiat sikäläkin tärkeitä olioryhmiä, että niiden oppiminen, opettaminen, hoitaminen ja ajaminen kuuluvat elämäämme. Aiheen laajuuden vuoksi asia jätetään kuitenkin tämän artikkelin ulkopuolelle.

Käsitteet eri näkökulmista

Filosofisten suuntausten ontologiset ja epistemiset lähtökohdat ovat ohjanneet keskustelua käsitteen- ja tiedonmuodotuksesta. Käsitteellisen mukaan käsitteet ovat mielestä riippumattoman maailman osia. Platon kannatti objektiivista idealismia, jonka mukaan käsitteet ideaaliolion muodostavat tosiolevaisen, ja aistimaailma on vain sen johdannainen tai heijastuma (Niiniluoto 1984, 39). Ideamaailman voi saavuttaa vain ajattelulla, ei aistihavaintojen avulla. Tällöin tutkiminen on ideamaailman etsimistä ja oppiminen on sen löytämistä. Käsitteellisen mukaiset opetusmenetelmät olisivat tällöin jonkinlaisia hakuohjeistoja. Aristoteleen mukaan jo aistihavainnossa on ideaalinen aines mukana, jolloin ideaalimaailma voidaan saavuttaa havainnoista induktiivisen yleistyksen kautta (emt. 39–42). Skolastikot opettivat, että maailma kopioituu ihmismieleen jonkinlaisten “speciesten” (esineiden lähettämiä hahmoja) välityksellä (Hobbes 1999, 36). Keskiajan nominalistit kielsivät universaalien olemassaolon. Heidän mielestään on olemassa vain yksilöolioita. Universaalit ovat nominalismin mukaan kielellisinä ilmauksina vain nimiä, mutta ne eivät ole itsenäisesti ihmismielestä riippumattomina olemassa (Niiniluoto 1984, 124). Konseptualismi on eräänlainen nominalismin johdannainen. Siinä universaalit ovat käsitteinä tietoisuuden tuotteita: ajatuksia ja

mielikuvia (emt. 124; Lacey 1996, 54). Nominalismi ja konseptualismi ovat sovitettavissa konstruktivismiin. Konstruktivismiin mukaan käsitteet ja käsitejärjestelmät ovat kulttuurituotteina ihmismielen luomuksia (Niiniluoto 1990, 188–190). Näin käsitteet ja niiden oppiminen kuuluvat ihmismielen aktiviteetteihin.

Merkityksen kontekstuaalisuus

Käsitteisiin viittaavan termistön niukkuudella on haittavaikutuksia niin ajattelemaan kuin kommunikointiin. Termin merkitys on kontekstisidonnainen riippumatta siitä, onko kysymys realismista, konseptualismista tai nominalismista. Esimerkiksi voima viittaa systeemin tai sen osien dynaamisiin piirteisiin, mutta muutoin se saa aivan eri merkityksen vaikkapa fysiikassa, taloustieteessä ja teologiasa. Asiayhteys paljastaa kuitenkin tässä tapauksessa termin merkityksen, eivätkä aihealueiden merkitykset pääse helposti sekoittumaan. Toisin on kuitenkin niiden tekstien laita, joissa jonkin tendenssin vuoksi pyritään tuottamaan näyttävä tulos verbaalisen näennäiskohereensin varjolla. Eklektismiksi nimitetään sitä toimintatapa, jossa kytketään keinotekoisesti perusteiltaan yhteensopimattomia aineksia toisiinsa. Taitavalla valinnalla ja sujuvalla verbalistiikalla voidaan kerätä toivottuja asioita eri puolilta miellyttäväksi kombinaatioiksi. Tarkempi selvitys voi kuitenkin paljastaa, että kombinaatio on kerätty taustaltaan yhteensopimattomista tekijöistä. Koska ilmaus ei kanna mukanaan kontekstivapaata sisältöä, sama termi tai lause voi saada eri merkityksen käyttöyhteydestä, teoriasta, periaatteesta tai perinteestä riippuen.

Kokemus on sekä käyttäytymistä että oppimista kuvaavissa ja selittävässä keskusteluissa usein esiintyvä termi. Kolben syklisen oppimismallin (1984) tekee *kokemus*

vaikaselkoiseksi. Mallista on käytetty kokemusoppimisen nimeä (experiential learning), koska sen käsitteenmuodostus perustuu kokemukseen ja koettelemiseen. Nelivaiheinen sykli käynnistyy kokemuksella, josta se reflektoinnin kautta tiivistyy käsitteeksi, jota neljännessä vaiheessa testataan (emt. 21). Seppälä (1980, 8–12) pitää analyyseissään yksilön *kokemusta* merkittävänä tekijänä oppimisessa, mutta teoreettisena käsitteenä epämääräisenä. Eri perinteissä termi kokemus saa toisistaan poikkeavia merkityksiä. Empirismissä kokemus viittaa tiedon alkuperään, aistihavaintoon (Hobbes 1999, 38–39), josta käsite-empirismin mukaisesti käsitteet abstrahoidaan. Pragmatismissa kokemus viittaa rutiinitoimintoihin tai ongelmatilanteisiin, joista selviydytään kokeiden avulla (Dewey 1998). Humanistisessa psykologiassa kokemukseen kuuluvat myös eriaistiset emotionaaliset painotukset (Rauhala 1990). Tarkkaavainen teoreetikko voi tietysti syventyä Kolben mallin perusteisiin ja arvioida tuotosta sen perusteella, kuten Miettinen tekee (1998). Miettisen käsittelyssä Kolben ”teoria” muuttuu malliesimerkiksi eklektisestä teorianmuodostuksesta. Mutta kuinka on kiireisen soveltajan laita? Antaako hän mallille mieleisensä tulkinnat ja soveltaa mallia tarkoitushakuisesti omiin hankkeisiinsa? Antaako opettaja mallille omat tulkintansa ja etsii keinovalikoimastaan sopivia menettelytapoja siten, että saisi mallista käyttökelpoisen?

Merkki ja merkitys

Merkkilajit

Edellä tarkasteltiin käsitettä ja huomattiin, että se on kiinteästi sidoksissa olioihin ja attribuutteihin. Käsitteen merkit-

semiseen, joka on kommunikoinnin edellytys, ei kiinnitetty huomiota, vaikka jo kirjoittaminen edellyttää merkkien käyttöä. Sitä osaa ajattelun käsitteellisestä välineistöstä, joka ei saa kielellistä ilmaisuja, sanotaan esikielelliseksi (ks. Saariluoma 1990, 71–77).

Merkin tehtävä on olla merkinä josta-kin, jota sanotaan merkitykseksi. Merkkejä ovat indeksit, ikonit ja symbolit. Indeksit viittaavat kohteeseensa rakenteellisen tai kausaalisen suhteen perusteella, kuten savu on tulen merkki. Kartta ja diagrammi ovat samankaltaisia kohteidensa kanssa. Ne ovat kohteidensa ikoneja. Symbolin merkitys perustuu sopimukseen. Kun koodauksesta sovitaan, myös indeksejä ja ikoneja voidaan käyttää symboleina. Wittgenstein kuvaa merkin ja symbolin suhdetta seuraavasti (1971, 16–17): ”Symboli luonnehtii erään muodon ja erään sisällön yhteyden.” ja ”Merkki on symbolin aistein havaittava osa.” Symboli on siis koodilla varustettu merkki. Fysiikassa tämä erottelu on otettu huomioon siten, että suurelle on omistettu tunnus. Kirjaimet, numerot, sanat ja lauseet ovat merkkejä ja muuttuvat symboleiksi vasta koodauksen jälkeen. Pedagogisesti tämä merkitsee sitä, että koodiston oppiminen on *ymmärtävään* oppimisen edellytys. Symboli -termin ongelmana on, että joskus sillä tarkoitetaan merkkiä ja joskus koodilla varustettua merkkiä.

Viittaus ja käsitteen sisältö

Merkkiin liittyvä merkitys ja sen tavoittaminen on eräs yhteisöllisen elämän ehdoista. Merkitys-termillä on laaja ja monipuolinen käyttö eri yhteyksissä (Ogden & Richards 1923). Kielen ja mielen syvimpiä probleemoja onkin, kuinka merkkien kombinaatiot voivat *viitata* itsensä ulkopuolelle ja *ilmaista* asioita. Näin syvällisiin kysymyksiin ei tässä yhteydessä

yritetäkään puuttua, vaan tyydytään aiheen kannalta relevanttiin kielellisen merkityksen tarkasteluun. Aaltola (1989, 16–28) näkee oppimisen kannalta neljä huomionarvoista merkityksen teoriaa: referenssiteoriat, ideaatioteoriat, käyttäytymisteoriat ja kielen käyttöteoriat. Referenssiteorioissa kieltä käytetään olioista puhumiseen. Ideaatioteorioiden taustalla on ajatus, että kielellisiä ilmauksia käytetään ajatusten ja kokemusten ilmaisemiseen. Käyttäytymisteoriat kuvailevat reaktioita, toimintoja, tilanteita ja näiden välisiä kytkentöjä. Kielen käyttöteorioissa kielellä on välineellinen tehtävä. Aaltolan mukaan (emt. 27) kielen käyttöteoria avaa muista poiketen luontevan näkökulman opettamiseen ja oppimiseen. Aaltola perustelee kriittistä suhtautumistaan ideaatio- ja referenssiteorioihin ideoiden ja referenttien identifioimisongelmilla. Tässä esityksessä pyritään selvittämään kuitenkin ymmärtämisen edellytyksiä merkityksellisten ideoiden ja tarkoitteiden kautta.

Referentiaalisen relaation, referenssin, välittävät merkin ja merkityksen (intensio ja ekstentio) välisiä semanttisia suhteita. Nimitettäköön käsitteen ja olioiden välistä suhdetta tarkoittamiseksi, koska käsite tarkoittaa jotakin. Realistien keskusteluissa merkillä on merkitys ja käsitteellä sisältö. Nominalistin käsitteellä on merkitys, jonka se saa käyttöyhteyksistään. Kattavimmillaan kielellisen ilmauksen intensionaalinen merkitys tarkoittaa kaikkia mahdollisia maailmoja, joihin se voi viitata, vaikka niistä vain yksi toteutuisikin (ks. Niiniluoto 1984, 121). Matemaattiset struktuurit, fysiikan mallit ja Fodorin prototyypit sopinevat ainakin realistin mielestä ideoiden tai idealisoitujen olioiden maailmaan. Jos *ymmärtämisellä* tarkoitetaan tekstin sisällön tavoittamista (Leinonen 2002), täytyy kuulijan tai lukijan *tulkintansa* ja *valintansa* avulla pystyä löytämään *tarkoitettu kohde* ja siihen soveltuvat

attribuutit käsitteidensä avulla. Väärinymmärtämisen mahdollisuuksia on monia!

Esimerkki: Raili Kauppi (1994, 9, 13) kirjoittaa artikkelissaan *Huomautuksia symbolisesta universumista* seuraavasti:

...”*Edellytetään myös, että puhe (tai muu ilmaus) on ilmoittavaa, että siis sanotaan jostakin jostakin, omistetaan tietty käsitteellinen merkitys, käsite tai propositio, jollekin oliolle tai asiantilalle, joka on puheen tarkoite. Tarkoitteen ei tarvitse olla todellinen.*”... Fysiikan maailmasta Kauppi toteaa, että ”*Fysiikan tutkima maailma on itse asiassa fysiikan teorian abstrakti malli.*”

Kyseisessä artikkelissa tarkastellaan sitä, millä tavoin ihmisen eletty ja koettu maailma rakentuu kielellisten symbolien varassa. Kauppi edellyttää, että puhe on intentionaalista tarkoittaen olioita tai asiantiloja. Todellisuus on olemassa, mutta puheen kohteiden ei välttämättä tarvitse olla todellisia. Esimerkiksi fysiikan tutkima maailma on abstrakti malli. Kauppi ei omista olioille ja asioille kuitenkaan attribuutteja, vaan käsitteitä ja propositioita. Mitä hän tällä tarkoittaa? Kivisen mukaan (1994, 140) Kauppi tarkoittaa käsitteillä attribuutteja. Onko Kauppi käsiterealisti (Lacey 1996, 54)? Kauppi tarkastelee artikkelissaan symbolien avulla koettua maailmaa, joka viittaisi siihen, että attribuutit olisivat mielen ja kulttuurin asioita ja siis käsitteitä. Onko artikkeli rakennettu kantilaisen tietoteorian mukaisesti, jota hän valottaa Minä-kollokvion julkaisussa muutamaa vuotta aiemmin (Kauppi 1988)? Voisiko tekstiä tulkita näillä perusteilla seuraavasti: Emme saa tietoa maailmasta sinänsä (das Ding an sich), vaan fenomeeneista. Fenomeenit ovat ilmiöitä, joissa havainnon muodot ja ymmärryksen kategoriat luovat käsitteelliset edellytykset tiedollisille kokemuksille. Attribuutit ominaisuuksina ja relaatioina olisivat siis tarpeettomia tai pikemminkin ne ovat vieraita entiteettejä tässä

ympäristössä. Vähäisen tausta-aineistonsa vuoksi tulkinta jää epävarmaksi. Mutta jo tämä esimerkki paljastanee, kuinka vaikea on saavuttaa kirjoittajan perspektiivi ja tekstin sanoma kirjoittajan tarkoittamalla tavalla!

Lopuksi

Nykykoulussa opetus tapahtuu suurelta osin kielen välityksellä. Kielellisen sanoman saavuttaminen on ymmärtämistä, joka puolestaan edellyttää tekstin tulkitsemista. Lukutaitoon tulisi kuulua oppiainekohtaisten tekstien erityispiirteiden hallintaa, esimerkiksi fysiikan opinnot edellyttävät matematiikan osaamista. Käsitteitä pidetään ajattelun välineinä, joten niihin ja niiden asemaan opetuksessa tulisi kiinnittää erityistä huomiota. Kuten huomattiin, käsite saa erilaisia sisältöjä tai merkityksiä näkökulman mukaan. Luki- ja kuulijan tulee huomata, että kirjoittajasta riippuen käsitteitä voidaan pitää ainakin teoreettisina entiteetteinä, piirteiden tai kokemusten kimppeina, pelkästään sanoina tai samaistaa käsite attribuuttiin. Näyttää siltä, että pedagogiseen tutkimukseen ja sovelluksiin sopii luonnehdinta, jossa käsite nähdään itsenäisenä kulttuurilementtinä, sen omaaminen on tietoisuutta attribuutista ja sen omaksuminen tapahtuu oppimisen välityksellä. Tämä näkemys sitoo käsitteen mieleen ja kieleen – oppimisprosessin keskukseen ja välineeseen. Attribuutit ovat puolestaan maailman osia, jotka tavoittamme aistien, ajattelun, mittavälineiden ja teorioiden avulla. Edellisen pohjalta voidaan kysyä: Miten koululainen tai opiskelija pystyy selvittämään itselleen eri oppiaineissa tekstin tulkinnan kannalta välttämättömät episteemiset ja ontologiset taustaoletukset? Missä määrin ymmärtäminen on sidoksissa tekstin tuottajan

perspektiiviin? Luotammeko tekstin tulkinnassa liikaa oppijan intuitioon vai sälyttämekö opettajille liian vaativia tehtäviä?

Lähteet

- Aaltola, J. 1989. Merkitys opettamisen ja oppimisen näkökulmasta. Jyväskylän yliopisto. *Studies in education, psychology and social research* 69.
- Ahlman, E. 1976. Kulttuurin perutekijöitä. Jyväskylä: Gummerus.
- Damasio, A. 2000. Tapahtumisen tunne. Miten tietoisuus syntyy. (Suom. K. Pietiläinen). Helsinki: Terra Kognita.
- Dewey, J. 1998. *How we think*. Boston-New York: H. M. Company.
- Fodor, J. 2001. Ajattelusta on vaikea tehdä normaalitydettä. *Niin & Näin* 2, 7–11.
- Hautamäki, A. 1989. Kognitiotieteen filosofiset perusteet. *Kieli, Kognitio ja Tekoäly*, 3–8.
- Hobbes, T. 1999. *Leviathan*. (Suom. T. Aho). Tampere: Vastapaino.
- Kaila, E. 1939. *Inhimillinen tieto*. Helsinki: Otava.
- Kangas, J. 1981. *Johdatus fysiikkaan*. Oulu: Oulun yliopisto.
- Kauppi, R. 1988. Transendentiaalinen minä. Teoksessa I. Niiniluoto & E. Stenman (toim.) *Minä*. Helsinki: Yliopistopaino, 25–32.
- Kauppi, R. 1994. Huomautuksia symbolisesta universumista. Teoksessa S. Heinämaa (toim.) *Merkitys*. Tampereen yliopisto. *Filosofisia tutkimuksia* 45, 7–16.
- Kivinen, A.S. 1994. Käsitteet merkityksinä. Teoksessa S. Heinämaa (toim.) *Merkitys*. Tampereen yliopisto. *Filosofisia tutkimuksia* 45, 139–160.
- Kolb, A.D. 1984. *Experiential learning, Experience as the source of the learning and development*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.
- Kuhn, T. 1994. Tieteellisen vallankumouksen rakenne. (Suom. K. Pietiläinen). Juva: WSOY.
- Kurki-Suonio, K. & Kurki-Suonio, R. 1994. Fysiikan merkitykset ja rakenteet. Helsinki: Limes.
- Lacey, A.R. 1996. *Concept. Dictionary of Philosophy*. London: Routledge & Kegan.
- Leinonen, J. 2002. Ymmärtäminen – jäsentynyt tietäminen. *Kasvatus* 33 (5), 475–483.
- Lukion opetussuunnitelman perusteet. 1994b. Helsinki: Opetushallitus.
- Lukion opetussuunnitelman perusteiden luon-

- nosversio. 2002b. <http://www.oph.fi/attachment.asp?path=1;443;5238;5242;8090;12721;12722> (28.8.2002)
- Marland, M. 1982. Language across the curriculum. Teoksessa E.B. Johnsen 1993. Textbooks in Kaleidoscope. Oslo: Scandinavium University Press.
- Miettinen, R. 1998. Miten kokemuksesta voi oppia? Kokemus ja reflektiivinen ajattelu John Dewey'n toiminnan filosofiassa. *Aikuiskasvatus* 2, 84–97.
- Niiniluoto, I. 1984. Johdatus tieteenfilosofiaan. Keuruu: Otava.
- Niiniluoto, I. 1990. Maailma, minä ja kulttuuri. Keuruu: Otava.
- Ogden, C. & Richards, I. 1923. The Meaning of Meaning. London: Routledge & Kegan.
- Paivio, A. 1986. Mental representations: A dual coding approach. Oxford Psychology Series 9. Oxford: Clarendon.
- Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet. 1994a. Helsinki: Opetushallitus.
- Perusopetuksen opetussuunnitelman luonnosversio. 2002a. <http://www.oph.fi/attachment.asp?path=1;443;5238;7954;13044;13047> (17.9.2002)
- Pirie, S. & Kieren, T. 1994. Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it. *Educational Studies in Mathematics* 26, 165–190.
- Rauhala, L. 1990. Humanistinen psykologia. Helsinki: Yliopistopaino.
- Saariluoma, P. 1990. Taitavan ajattelun psykologia. Helsinki: Otava.
- Seppälä, J. 1980. Kristillisen uskon jäsenyminen nuorten elämäntilanteeseen rippikoulussa. Helsingin yliopiston käytännöllisen teologian laitos. Uskonnon pedagogiikan julkaisuja B4.
- Silfverberg, H. 1999. Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto. Tampereen yliopisto. Acta Universitatis Tamperensis 710.
- Stepin, V. 1983. Tieteellisen teorian muodostus. (Suom. R. Kolehmainen). Moskova: Progress.
- Wittgenstein, L. 1971. Tractatus Logico-Philosophicus eli Loogis-filosofinen tutkielma. (Suom. H. Nyman). Porvoo: WSOY.

C



JORMA LEINONEN – ANNE KORHONEN

Miten arvioida matematiikan opiskelua ja ymmärtämistä

Leinonen, Jorma – Korhonen, Anne. 2005. MITEN ARVIOIDA MATEMATIIKAN OPISKELUA JA YMMÄRTÄMISTÄ. *Kasvatus* 36 (1), 33–42.

Tässä artikkelissa on kehitetty ja kuvailtu matematiikan opiskelun diskurssianalyttistä arviointia. Empiirisenä aineistona on käytetty luokanopettajakokelaisten opiskelupäiväkirjoja heidän matematiikan opinnoistaan. Työssä on arvioitu, kuinka opiskelijat ymmärtävät matemaattisten käsitteiden merkityksiä ja kuinka he selviytyvät tehtävistä, jotka koskevat eri lukujärjestelmiä. Teoreettisena viitekehystenä on käytetty brittiläisen tradition mukaista diskurssianalyysiä (Potter & Wetherell 1987; Edwards 1993). Päiväkirjoista on poimittu kaksi erilaista diskurssia. Toisessa diskurssissa tarkastellaan matemaattisia tehtäviä empiirisestä näkökulmasta. Ongelmien ratkaisuun pyritään käytännön kokemusten ja muistisääntöjen avulla. Toisessa diskurssissa matematiikan opiskelu perustuu luovaan ajatteluun. Tällöin yritetään löytää *oikea ajattelutapa*, kuten eräs opiskelija kirjoitti. Tässä diskurssissa pystyttiin käyttämään esimerkiksi diskurssien ristiriitaa matemaattisessa päättelyssä.

Asiasanat: diskurssi, diskurssianalyysi, matematiikan opiskelu, merkitysjärjestelmä, ymmärtäminen

Johdanto

Oppimisen arviointi on oleellinen osa opetustyötä. Yleensä arvioinnin painopiste on erilaisten testien, kokeiden ja todistusten numerisissa palautteissa. Numeroarvostelun heikkoutena on, että palaute tulee viiveellä. Lisäksi luokkayhteisössä oppilas voi saamansa numeron perusteella leimautua kiusallisesti. Oppimisen arvioinnin tulisi kohdistua myös siihen, miten asioita ymmärretään ja

kuinka uusia asioita opiskellaan. Atjosen (2003, 446–447) mukaan pedagogisesti merkittävämpiä arviointimuotoja ovat ne, jotka kohdistuvat opetus-, opiskelu- ja oppimisprosesseihin.

Kokeisiin perustuvat arvioinnit ovatkin saaneet suomalaisissa tutkimuksissa rinnalleen muita arviointimuotoja, kuten itsearviointia (esim. Hakkarainen ym. 2000, 165–170), portfolioit (esim. Judén-Tupakka 2003) ja oppimispäiväkirjat (esim. Lonka & Lonka

1991). Tässä työssä on tarkoitus kehittää matematiikan opiskelun ja ymmärtämisen arviointia opiskelupäiväkirjojen pohjalta. Arviointi perustuu opiskelupäiväkirjojen diskurssianalyttiseen tulkintaan. Aiheen kehittämissä näytetään esimerkkien avulla, kuinka opiskelu etenee ja asioiden ymmärtäminen kehittyy.

Diskurssianalyttistä ainedidaktista tutkimusta matematiikassa ovat tehneet esimerkiksi Sfard (2000), Kumpulainen (2002) ja Kaartinen (2003). Diskurssianalyysistä ei kuitenkaan ole muodostunut yhtä yhtenäistä tutkimusperinnettä, vaan siitä esiintyy useita erilaisia versioita. Tämän artikkelin viitekehys pohjautuu brittiläiseen traditioon (esim. Potter & Wetherell 1987; Edwards 1993), jota Jokinen ym. (1993b; 1999) ovat kehittäneet edelleen. Tässä perinteessä kielenkäyttö nähdään konstruktionismin mukaisesti sosiaalisena toimintana, joka tuottaa sosiaalisen todellisuuden ja jonka mukaan orientoituminen maailmaan tapahtuu (Gergen 1994). Matematiikka on yksi osa sosiaalista toimintaa. Matematiikan oppiminen on liittymistä sosiaalisiin järjestelmiin ja ymmärtäminen kielenkäytön hallintaa, mikä on mielekkään kommunikoinnin ehto. Toiminta ja kommunikointi kuuluvat puolestaan opetus-tapahtuman ytimeen (Kansanen 2004).

Diskurssianalyysi ja ymmärtäminen

Teoreettinen viitekehys ja päiväkirjat

Diskurssianalyysi on tekstin analyysiä, jossa yritetään löytää merkityksiä ja merkitysjärjestelmiä. Merkitys ei tarkoita kielellisen ilmauksen sisältöä, vaan se on kielenkäytön määre, joka ilmenee sosiaalisissa tavoissa ja instituutioissa (Wittgenstein 1953). Tämän työn kannalta oleellisimpia merkityksiä ovat episteemiset, tekniset ja praktiset merkitykset. Esimerkiksi osa luvun kaksi episteemistä merkitystä matematiikassa on, että se on parillinen alkuluku. Sujuvalla laskutaidolla on

tekninen merkitys matematiikan taidoissa. Matematiikan osaamisella on puolestaan praktinen merkitys insinöörien työssä. Merkitykset kombinoituvat merkitysjärjestelmiksi, joiden avulla todellisuutta hahmotetaan ja rakennetaan ja joihin toimijat kiinnittyvät. Merkitysjärjestelmät ovat sosiaalisesti tuotettuja ja ylläpidettyjä systeemejä, ja ne voivat tukea toisiaan tai olla ristiriitaisia keskenään.

Muita keskeisiä käsitteitä diskurssianalyysissä ovat subjektipositio, funktio, konteksti ja faktuaalistamisstrategia, joiden mukaan merkitysjärjestelmät nimetään diskursseiksi (Jokinen ym. 1993a, 17–47; Juhila 1993, 151–158). Subjektipositiolla tarkoitetaan esimerkiksi opiskelijan asemaa työryhmässä tai hänen näkökulmaansa matematiikkaan. Diskurssianalyttisessä tutkimuksessa, matematiikasta poiketen, funktiot viittaavat niihin tehtäviin, joita yksittäisellä ilmauksella tai teolla on toimintaympäristössään. Esimerkiksi lausekkeen sieventäminen edistää yhtälön ratkaisemista. Kontekstit ovat niitä ympäristöjä, joissa väite, käsite tai teko saa merkityksensä ja tulee ymmärretyksi. Peruskoulun matematiikan kannalta geometria on kolmion kulman kontekstuaalinen ympäristö, mutta kulma ei ole ensisijaisesti algebran käsite. Faktuaalistamisstrategialla tarkoitetaan jonkin väitteen perustelutapaa, jota matematiikassa edustaa esimerkiksi todistus ristiriidan kautta.

Diskurssien rakentaminen perustuu niiden enemmän tai vähemmän piilevien oleustusten tunnistamiseen, joita ”neutraaleinkin” kieli sisältää. Työmme empiirisen aineiston opiskelupäiväkirjat ovat selontekoja, joissa opiskelijat kertovat työskentelystään matematiikan parissa ja pohtivat omaa opiskeluaan. Koska selontekoja ei diskurssianalyysissä voida pitää ajatusten kopioina tai heijasteina, aineiston analysointi perustuu päiväkirjojen tulkintaan, joka on tässä työssä tehty formaalin matematiikan (Ernest 1991, 10–11) näkökulmasta. Diskurssianalyysi kulminoituu siis tekstien taustalla olevien kon-

tekstien etsimiseen ja luomiseen, jolloin kielelliset ilmaisut saavat tulkintojen kautta merkityksensä.

Opiskelupäiväkirjat on kirjoitettu luokanopettajakoulutuksen perusopinnojen Koulumatematiikan kurssista. Koulumatematiikkaan kuuluvan kurssin pituus oli viisi viikkoa. Viikossa oli kaksi tuntia luentoja ja kaksi tuntia pienryhmäharjoituksia. Tämän kurssin sai suorittaa perinteisellä tavalla tentteineen tai kirjoittamalla päiväkirjaa. Kurssin yhtenä osana olivat lukujärjestelmät, jotka päiväkirjojen mukaan olivat opiskelijoille uutta asiaa. Kurssin 64 opiskelijasta 17 suoritti osuutensa laatimalla opiskelupäiväkirjan. Päiväkirjaa tuli työstää kurssin etenemisen mukaan ja kukin viikon osuus tuli palauttaa seuraavalla viikolla. Empiiriset otokset ovat aineistosta, joka kerättiin tammi–helmikuussa 2001. Päiväkirjat on dokumentoitu tekijän mukaan aakkosjärjestyksessä 1–17 ja kukin päiväkirja on varustettu sivunumeroilla viittauksen paikantamiseksi. Esimerkiksi ote 1 (2/26) löytyy toisesta päiväkirjasta sivulta 26.

Ymmärtäminen taitona

Ymmärtämisellä voidaan tarkoittaa esimerkiksi symbolien herättämiä ajatuksia (Hobbes 1962/1651, 27), sisäisiä tietoverkkoja (Hiebert & Carpenter 1992, 67), yleiskatsauksellista näkemystä sanojen käytöstä (von Wright 1998), korrektia kielenkäyttöä (Wittgenstein 1953, 58: § 146), intuitiivisia kokemuksia osaamisesta (Wittgenstein 1953, 63: § 157) tai jäsentynyttä tietämistä (Leinonen 2002). Ymmärtämistä voidaan luonnehtia myös tietojärjestelmiin liittyvän kontekstuaalisuuden, jäsentyneisyyden, koherenssin, tiivyyden, selitysvoinman ja käyttökelpoisuuden kriteerein.

Tässä työssä ymmärtämisellä tarkoitetaan jäsentynyttä tietoa, joka ilmenee kielenkäytön taitona, kuten esimerkiksi laskualgoritmien osaamisena ja matemaattisten päättelysääntöjen hallintana. Primaaritason ymmärtämisessä on kyse teorian ja menetelmi-

en hallinnasta, joka on matematiikassa elegantin ongelmanratkaisun edellytys. Ongelmanratkaisija tekee johtopäätöksiä ja valintoja teorian puitteissa. Se, että ymmärtäminen on taito, on pedagogisesti merkittävä seikka, koska taitoa voidaan opettaa ja kehittää erilaisten harjoitteiden avulla (Aaltola 1989, 27).

Diskurssianalyyseissä tietoa jostakin asiasta pidetään neuvottelutuloksena ja yhteisymmärryksenä. Yhteisymmärrys neuvottelutuloksena merkitsee yhteisen merkitysjärjestelmän konstruointia tai toimintaa yhteisen merkitysjärjestelmän puitteissa. Esimerkiksi dialogit (Sarja 2000) koululuokassa tarjoavat virikkeisiä ympäristöjä, joissa oppilas voi oppia asioita eli päästä käsiksi yhteisiin merkitysjärjestelmiin. Dialogisia oppimisympäristöjä ovat esimerkiksi keskustelupiirit, paneelit ja aivoriihet.

Metaymmärtämisellä tarkoitamme toisen kertaluvun näkökulmaa tapahtumiin. Diskurssianalyyseillä tuotetaan metaymmärtämistä, kun selonteoista ja teksteistä etsitään sosiaalisen yhteisön tuottamia ja ylläpitämiä hahmotustapoja (ks. Jokinen ym. 1993a, 17–22). Asettuessaan metaymmärtämisen näkökulmaan opettaja voi arvioida opiskelijoiden opiskelutapoja ja asioiden jäsentymistä sekä omaa toimintaansa.

Opiskelun diskurssit ja metaymmärtäminen

Millaisten merkitysjärjestelmien varaan opiskelijat sitten rakentavat matemaattista maailmaansa? Kuvaamme aluksi opiskelua kahden diskurssin avulla ja sitten näytämme, kuinka ristiriitaa käytetään opiskelussa. Lopuksi tarkastellaan metaymmärtämisen roolia opiskelussa. Aineistosta nousee esiin kaksi erityyppistä opiskelutapaa, jotka nimeämme luonteensa mukaan mekaanisten muistisääntöjen diskurssiksi ja heuristisen tunnus-telun diskurssiksi. Heuristisessa diskurssissa tavoitellaan matemaatikkojen ajattelutapaa eli kuhnlaisittain pyritään matemaatikkojen

yhteisön jäseneksi. Mekaanisessa diskurssissa yritetään saada matematiikan merkkivii-dakkoon jonkinlaista järjestystä erilaisten muistisääntöjen avulla. Heuristinen diskurssi voi johtaa asiantuntijatietoon, kun taas mekaaninen diskurssi tuottaa praktista tietoa ja sillä on tärkeä tehtävä arkielämässä. Meille kaikille on apua esimerkiksi kertotaulun osaamisesta, mutta asiantuntijalta edellytetään, että hän tietää kertolaskun olevan toistuvaa yhteenlaskua ja että vaihdantalain perusteella tulon tekijöiden järjestys ei vaikuta tulokseen. Tiedonlajien paremmuudesta ei käy kiistelemineen, sillä kumpaakin tarvitaan. Sitä vastoin varmuusasteessa on eroa, kuten Hobbes (1962/1651, 46) hiukan liioitellusti toteaa: Praktinen tieto on aina epävarmaa, mutta asiantuntijatieto on pettämätöntä.

Mekaanisten muistisääntöjen diskurssi

Mekaanisten muistisääntöjen diskurssissa matemaattisten ongelmien ratkaiseminen perustuu ulkoa opeteltujen muistisääntöjen käyttämiseen. Tukea ongelmien ratkaisemiseen haetaan empiirisestä todellisuudesta, josta löytyy diskurssin konteksti. Tämän diskurssin subjektipositiota kutsumme naturalistin näkökulmaksi. Otteet 1–8 edustavat mekaanisten muistisääntöjen diskurssia, ja ne osoittavat, että matematiikka voi näyttäytyä joukkona irrallisia faktoja ja sääntöjä. Ote 1 koskee potenssin muistisääntöä:

Ote 1

Hox! Täytyy muistaa, että aina kun jokin luku on potenssiin nolla (x^0), niin tulos on yksi. (2/18)

Tämän otteen kirjoittaja ottaa kyseisen potenssisäännön hiukan myöhemmin esille ja arvelee, että sääntö on sopimuksenvarainen:

Ote 2

Jossain edeltävässä raportissa mainitsin sen enempiä pohtimatta, että X^0 on aina yksi (eli kun kantaluku on mikä tahansa mutta eksponentti nolla niin vastaus on aina yksi). Mutta miksi, siihen en ottanut mitään kantaa? Olen aina ajatellut,

että siihen ei ole mitään loogista selitystapaa, se on vain yhteisesti päätetty sääntö. (2/26)

Otteen 3 kirjoittaja näkee kerto- ja potenssilaskut samoina operaatioina. Kirjoittaja päättelee, että nollapotenssi on nolllalla kertomisen poikkeustapaus ja lisäksi toteaa, että säännöllä kuuluukin olla poikkeus.

Ote 3

...että jos nolllalla kertoo, niin vastaus on nolllalla. Näinhän se on ei millään kerrotaan luku x , vastaus on 0. Mutta nollapotenssipa on aina yksi, kyseessä on siis poikkeus, sääntö. (14/10)

Matematiikka esiintyy tässä diskurssissa jonkinlaisena työkalupakkina (ks. Pehkonen 2000, 357), joka sisältää erilaisia sääntöjä ja niiden poikkeuksia. Kuten otteista 1, 2 ja 3 käy ilmi, opiskelijat panivat merkille potenssit, joiden eksponentti on nolllalla. *Nollapotenssi* ei näissä tapauksissa askarruttanut kirjoittajia enempää eikä jäsentynyt opiskelijoiden matematiikkaan potenssin määritelmän mukaisesti, vaan siitä tyydyttiin muodostamaan mekaaninen muistisääntö.

Otteen 1 ja 2 kirjoittajaa jäi ilmeisesti vai-vaamaan pelkkä potenssisäännön muistaminen ilman perusteluita, koska hän palasi vielä kerran asiaan. Hän päätti tutkia samankantaisten potenssien kertomista, kun eksponentit olivat 1 ja -1 . Potenssien kanssa työskentely tapahtui opetuksessa annettujen esimerkkien mukaisesti, mutta kirjoittaja ei saanut asiasta oikein otetta ja viimein hän luovutti toteamalla:

Ote 4

Minä taidan tyytyä siihen, että viisaammat ovat päättäneet, että jos eksponentti on nolllalla niin vastaus on aina 1. (2/27)

Potenssisääntöä perusteltiin vetoamalla auktoriteettiin viisaampien päätöksenä eikä väitteenä, jota voitaisiin itse koetella tai perustella. Auktoriteettiin vetoaminen on faktuaalistamisstrategia, joka oikeuttaa kirjoittajan hyväksymään potenssisäännön.

Otteista 1-5 voidaan havaita, että mekaa-

nisten muistisääntöjen diskurssissa matemaatiikan tehtävistä selviytymiseen varaudutaan erilaisin säännöin. Diskurssissa ei yritetä hahmottaa matemaattisia struktuureja yhteinäisinä merkitysjärjestelminä, vaan mieleen painetaan erillisiä muistisääntöjä. Tämä voi johtaa muun muassa muistin ylikuormittumiseen sekä lopulta turhautumiseen, kuten otteen 4 tapauksessa tai ahdistumiseen kuten seuraavan otteen kirjoittajalle kävi:

Ote 5

Jakolaskut [eri järjestelmissä -JL] mekaanisesti kyllä aukenevat, mutta en pääse jotenkin niiden sisälle eli ymmärtämään mistä on kysymys. Tuntuu, kuin avuttomana tarkastelisin niitä, mutta en oikein pääse käsiksi syvällisesti ymmärtäen niitä. Aivan ahdistaa kun aloitan jakamisen, koska mekaanisesti muka ymmärrän mistä on kyse, mutta hetken päästä sekoan jossain vaiheessa. Täytyy muistaa monta asiaa kerrallaan. (3/18)

Mekaanisten muistisääntöjen diskurssissa yritetään löytää lukujen säännöllisyyksiä koskevia yleistyksiä empiirisen maailman faktoina, kuten otteista 6 ja 7 nähdään:

Ote 6

Esimerkiksi, jos 3 jaetaan 0:lla niin automaattisesti ajattelin, että sehän on kolme. Eli, jos vaikka kolme karkkia jaetaan 0 lapsen kesken niin olen ajatellut, että se on 3, kun sitä ei jaeta kenellekään. (2/26)

Induktio toimii diskurssin toisena faktuaalistamisstrategiana: opiskelija tekee yleistyksen empiirisen esimerkin avulla. Empiiriset yleistyksiset eivät välttämättä johda asianmukaiseen lopputulokseen formaalissa matemaatikassa. Induktiivinen päättely on kuitenkin tavanomaista niin arkielämässä kuin koulussakin (ks. myös Pehkonen 2000, 379). Sitä vastoin teoreettiset yleistyksiset ja pohdiskelut tarjoaisivat mahdollisuuden tarttua opiaineen olemukseen syvällisemmin.

Seuraavassa otteessa nolla on empiirisen maailman edustaja:

Ote 7

Yleensä ajatellaan, ettei nolla ole mitään, mutta

siirretäänpä nolla tai vaikkapa useampia jonkin luvun perään niin eiköhän mielipide muutu — varsinkin jos mietitään sitä raha-asioissa. (2/11)

Nolla on aluksi tyhjän merkinä, se tarkoittaa: ei mitään. Nollan merkitys kuitenkin muuttuu oleellisesti, kun se yhdistetään rahaan. Nolla viittaa jälleen empiiriseen ympäristöön, ja sillä on käyttäjälleen praktinen merkitys. Vaikka nolla ei ole abstrahoitunut matemaattisen struktuurin teoreettiseksi entiteetiksi, se ei estä tavanomaista kommunikointia, koska nollalle annetaan omat tilannekohtaiset merkityksensä. Nollalla on myös oma sijansa teknisten muistisääntöjen joukossa, kuten edellä olevista otteista nähtiin.

Mekaanisten muistisääntöjen diskurssi suuntaa myös tiedon hankintaa opinnoissa, kuten seuraavasta katkelmasta nähdään:

Ote 8

Edelleen mieltäni vaivaa kysymys miksi tämä kurssi kulkee nimellä koulumatematiikka. En ole mielestäni löytänyt juurikaan luennoilla tai harjoituksissa vinkkejä siihen, kuinka matematiikkaa opetetaan koulussa. Laskut, joita laskemme, eivät mielestäni liippaa läheltäkään peruskoulun matematiikan opetusta. (6/4)

Otteessa 8 opiskelija arvioi sitä, onko hän saanut koulumatematiikan kurssilla didaktisia vinkkejä matematiikan opetukseen peruskoulussa. Matematiikan opiskelu yliopistossa saa diskurssissa praktisen merkityksen. Opetusmenetelmät ovat jonkinlainen konkreettisten vinkkien tai tekniikoiden joukko, jonka tehtävänä on auttaa opettajia selviytymään koulussa. Tulevaa opettajaa ei kiinnostata matematiikka oppijärjestelmänä, eikä hän koe haasteellisenä matematiikan väittämien ymmärtämistä. Hän ehkä ajattelee, että matematiikan opetuksessa menestytään nokkelilla opetusmenetelmillä, joita yliopiston tulisi tarjota. Sävyttävätkö mekaanisten muistisääntöjen diskurssin mukaiset irralliset muistisäännöt ja vinkit opettajan pedagogisista työtä tulevaisuudessakin?

Heuristisen tunnustelun diskurssi

Heuristista diskurssia esiintyy kerätyssä aineistossa vähemmän kuin mekaanista diskurssia. Mekaaniset muistisäännöt koskevat lähinnä arkipäivän ongelmatilanteita, kun taas heuristisen tunnustelun diskurssissa uudet asiat kohdataan älyllisinä haasteina, jolloin ongelmia ratkaistaan oppiaineiden ehdoilla. Tämän näkökulman intressit ovat teoreettisia, ja ne voivat olla vieraita arkijärjelle (Ahtee 1998, 359). Otteet 9–14 edustavat heuristista diskurssia, missä asioista pyritään saamaan käsitteellinen ote hypoteesien keksimisen ja testaamisen avulla.

Otteessa 9 opiskelija pohdiskelee kantaluvin käsitettä ja sen merkitystä seuraavasti:

Ote 9

Kun merkit loppuvat, pitää ottaa kirjaimia tilalle. Onkohan niin, että kirjaimia tulee lisää, kun järjestelmä kasvaa kymmenjärjestelmän yli? Jos ajatellaan, että jokainen järjestelmä alkaen yksitoistajärjestelmästä tuo aina lisää yhden kirjaimen, niin kaksikymmentäjärjestelmässä luulisi olevan jo kymmenen kirjainta. (4/18)

Otteessa 10 opiskelija pyrkii ensin ymmärtämään järjestelmien väliset muunnokset joukkomallien avulla ja sitten löytämään säännön muunnosten suorittamiseen:

Ote 10

Luennolla laskettiin taas järjestelmälaskuja, jotka muuten alkavat olla todella mielenkiintoisia, kun niihin pääsee sisälle. Luennoilla selvitin itselleni nyt viimeistään, miten muutetaan esim. 3421 viisijärjestelmästä kymmenjärjestelmään helpolla tavalla. Enää ei tarvitse alkaa piirtämään joukkoja. Koska järjestelmä on viisi, niin laskemalla käytetään viiden potenssia. Muilla tunneilla en tajunnut potenssien yhteyksiä ollenkaan. Luennoilla aloin vain järjestelmällisesti miettiä, että miten luvuista on saatu tietyt vastaukset, ja keksin itse ratkaisun, kun keksin oikean potenssin. Harjoituksissa laskettiin sitten vielä samanlaisia laskuja ja ne toimivat minulle vahvistavina. (16/13–14)

Otteissa 9 ja 10 keksitään hypoteeseja, joita koetellaan uusilla tehtävillä, kuten jälkimmäisessä otteessa tehdään. Diskurssin subjektipositiota luonnehtii uteliaisuus ja etsiminen, jotka antavat diskurssille dynaamisen luonteen. Itselle esitettyjen kysymysten avulla asiasta yritetään päästä ”kärryille”. Nimeämme diskurssin subjektiposition ihmettelijän näkökulmaksi. Tämä näkökulma suuntaa opiskelijaa osuvien kysymysten etsimiseen. Ihmettelijän positiota voidaan pitää tutkivan opiskelun näkökulmana, mihin kuuluu aiheen mukainen teoreettinen välineistö. (Hakkarainen ym. 2000, 189–207; ks. myös Hiidenmaa 2000, 171.) Heuristisessa päättelyssä korostuu induktion ja deduktion ohella Peircen (1992, 194) abduktio, jolloin perinteisiin päättelyihin lisätään hypoteesin keksiminen.

Asian ymmärtäminen voi valjeta nopean oivaltamisen jälkeen (Greene 1977, 18–19) eikä tapahtumaa osata välttämättä kuvailla, kuten otteista 11 ja 12 selviää:

Ote 11

Ensimmäinen alfametriikan tehtävä oli mielestäni helppo. Jotenkin se vain naksautti nopeasti kohdilleen. Vaikea oli vasta, kun täytyi selittää toisille miten päädyin vastaukseen — sepä ei ollut helppoa. (17/7)

Otteessa 11 tehtävän ratkaisu löytyi ikään kuin itsestään (Greene 1977, 19) lyhyen kypsyttelyvaiheen jälkeen. Kypsymisvaiheessa olevan asian oivaltaminen voi tapahtua missä ja milloin tahansa. Oivaltamisen tarkempi analyysi on otteen 11 kaltaisessa tapauksessa vaikeaa, koska opiskelijat eivät osaa kuvata tehtävän ratkaisuun johtanutta tapahtumasarjaa. Tällöin tulkintaan ja analyysiin tarvitaisiin monipuolisempaa empiiristä aineistoa kuin opiskelupäiväkirjat. Toisaalta kuvaamisen vaikeus voi johtua siitä, että opiskelijat eivät ole tottuneet opiskelupäiväkirjojen kirjoittamiseen tai ohjeistus ei ole onnistunut – vai onko tapahtuma sellainen, että sitä ei pystytäkään kuvailemaan.

Otteessa 12 kuvataan, kuinka kaksijärjestelmällä laskemisen periaate valkeni opiskelijalle mallipiirrosten avulla.

Ote 12

Laskimme luennolla kaksijärjestelmällä ja se oli aluksi kyllä minulle vaikea, mutta sitten loksahiti kun piirrettiin ympyröitä eli muodostettiin ryhmiä ja sitten katsottiin jäikö yli ja sitten merkittiin mikä luku oli kyseessä. Näillä eri järjestelmillä laskeminen vaatii keskittymistä ainakin minulta, mutta oli sitten kyllä todella mielenkiintoista ja sitten se onnistumisen riemu tietenkin palkitsi. Ensin tuntui, että eihän tässä ole mitään logiikkaa mutta kyllä siellä oli. (1/4)

Kantaluvun ja paikka-arvon käsitteet muodostivat kirjoittajalle ympäristön, jossa kaksijärjestelmän tehtävät alkoivat ratketa (Leinonen 2002, 477–478). Heuristisessa diskurssissa ei turvauduta empiiriseen perusteluun, konkreettisiin malleihin tai muistisiin töihin, vaan tehdään formaalia matematiikkaa. Kekseliäät hypoteesit näkyvät osuvina kysymyksinä, kuten otteessa 9 kirjoitetaan: *Kun merkit loppuvat pitää ottaa kirjaimia tilalle. Onkohan niin, että kirjaimia tulee lisää kun järjestelmä kasvaa kymmenjärjestelmän yli?* Asian oppimisen kannalta olisi tärkeää löytää ne oppiaineen keskeiset rakenteet ja kriittiset kohdat, jotka ovat oppimisen edellytyksenä.

Ristiriidat ja oppiminen

Tämän luvun analyysi on esimerkki siitä, kuinka opiskelu etenee diskurssien ristiriidan kautta. Ristiriita toimii tässä heuristisena faktuaalistamisstrategiana. Siinä arvioidaan esillä olevien vaihtoehtojen paremmuutta ja valitaan toinen.

Ote 13

Esimerkiksi, jos 3 jaetaan 0:lla niin automaattisesti ajattelin, että sehän on kolme. Eli, jos vaikka kolme karkkia jaetaan 0 lapsen kesken niin olen ajatellut, että se on 3, kun sitä ei jaeta kenellekään. (2/26)

Otteessa 13 pohditaan jakolaskua kahdessa eri positiossa. Ensimmäinen virke viittaa laskutoimitukseen, joka on laskusäännön

näkökulma: *jos 3 jaetaan 0:lla niin automaattisesti ajattelin, että sehän on kolme.* Sääntöä perustellaan konkreettisen tekemisen näkökulmasta otteen jälkimmäisessä virkkeessä: *jos vaikka kolme karkkia jaetaan 0 lapsen kesken niin olen ajatellut, että se on 3, kun sitä ei jaeta kenellekään.* Tässä nolla ei edusta lukua, vaan viittaa osittamistekoon, jota ei suoriteta. Jaettavaa tosin olisi, mutta referenttinä olevat lapset puuttuvat ja karkit jäävät jakajan haltuun.

Hiukan myöhemmin samassa päiväkirjassa, ote 14, nollalla jakamista testataan kertolaskulla ja huomataan, että aiemmin muistiin painettu sääntö on virheellinen. Asia varmistetaan vielä ristiriidan avulla. Päiväkirjan kirjoittaja näyttää päättelevän, ettei kolme jaettuna nollalla ja yhdellä voi antaa samaa tulosta. Kirjoittaja ei kuitenkaan perustele tarkemmin ajatteluaan, että *kolme jaettuna yhdellä on kolme.* Päiväkirjasta ei käy ilmi esimerkiksi, pitääkö kirjoittaja tätä annettuna sääntönä, onko hän varmentanut tuloksen kertolaskulla vai käyttääkö hän sisältöjaon perustetta: yksi sisältyy kolmeen kolmesti.

Ote 14

Ymmärsin ja hyväksyin säännön kokonaan vasta sitten, kun sain todistettua asian itselleni laskun kautta. Testasin asiaa tarkemmin miettimien lukujen kautta. Jos ajattelen, että 3 jaettuna 0:lla on kolme, niin laskusääntöjen mukaanhan silloin täytyisi nolla kertaa kolme olla kolme ja sitähan se missään nimessä ei ole. Nyt ymmärsin miksei nimittäjä saa olla nolla. Ja jos tarkemmin ajattelee niin kolme jaettuna yhdellä on kolme!!!! (2/26)

Jakamisella on siis kaksi erilaista tulkin-taa: formaali ja informaali. Pyrkimyksenä näyttää olevan, että ensin sääntö perustellaan empiirisellä analogialla. Tällä tavoin ei yksiselitteistä laskusääntöä nollalla jakamiseen kuitenkaan löydetty – ei ihmeekään, koska matematiikassa nollalla jakamista ei ole määritetty. Nollalla jakamisen ristiriita ratkesi teoreettisin keinoin ja otteen 14 mukaan asia tuli ymmärretyksi. Ristiriidalla on aina ollut merkittävä asema tiedon muodostuks-

sa. Kerrotaan, että fysiikan nobelisti Niels Bohr oli kerran mutissut työtoveriansa kuulleen jotenkin seuraavasti: *Loistavaa, olemme törmänneet paradoksiin. Nyt voimme todella toivoa edistyvämmä* (de Guzmán 1990, 55).

Matematiikan opiskelu ja käsitteenmuodostus tapahtuvat sekä mekaanisten että heurististen diskurssien puitteissa. Konkreettiset havaintomallit ja sääntöjen opettelu kuuluvat matematiikan opiskeluun, mutta niillä on myös omat rajoituksensa. Käsitteenmuodostus ei tapahdu pelkästään empiirisistä havainnoista tehtyjen epäoleellisten tekijöiden eliminaationa, vaan käsitteenmuodostukseen kuuluu täydentävä *produktiivinen momentti* (Nevanlinna 1963, 19–20). Esimerkiksi lukusuoran muodostuksessa ovat lähtökohdina luonnolliset luvut 0,1,2,3, ... Lukusuorasta tulee aukoton jatkumo, kun siihen lisätään negatiiviset kokonaisluvut ja sitä täydennetään murtoluvuilla ja lopuksi irrationaaliluvuilla kuten luvulla π (3,141...) ja sen monikerroilla. Käsitteenmuodostuksen luova täydentävä vaihe on haastava ongelma matematiikan opetukselle varsinkin, jos halutaan opettaa formaalia matematiikkaa ja sen edellyttämää ajattelua. Opetuksessa käytetyt havainnollisuutta korostavat mallit voivat muodostua jopa haitaksi matemaattisten struktuurien luomisessa, analyyseissä ja tehtävien ratkaisemisessa, ellei esimerkiksi käsitteenmuodostuksen täydentävä konstruktio ole abstrahointivaiheessa onnistunut. On huomattava, että vaikka käsitteenmuodostus olisikin lähtökohdiltaan empiirinen, ei matematiikka silti ole luonteeltaan empiirinen tiede.

Metaymmärtäminen

Oman ajattelun jäljitys ja arviointi ovat metatason ajattelua. Metaymmärtämisessä ongelmien mahdolliset ratkaisut näyttäytyvät jo jäsenyneinä, ja ratkaisujen paremmuutta voidaan arvioida valituilla kriteereillä, kuten katkelmassa 14 on tehty. Opiskelija toteaa ottees-

sa 15 pohtineensa omaa ajatteluaan ja kertoo saaneensa oppimalleen vahvistusta esittäessään ajatuksiaan toisille. Opiskelijalle ei näytä riittävän yksi oikea ratkaisu asiaan, vaan hän on kiinnostunut uusista näkemyksistä, erilaisia ajattelutavoista ja virheratkaisuista.

Ote 15

Mielestäni olen saanut apua juuri siitä, että pohdin miten olen ajatellut, olenpa sitten ajatellut väärin tai oikein, ja toiselle oman ajattelutavan esittäminen vahvistaa sitä oppimista ja tuo esille ne virhekohdat. Samalla tulee uusia näkemyksiä asioihin ja erilaisia ajattelutapoja, joilla päästään samaan ratkaisuun. (1/12)

Yllä olevan otteen kirjoittaja näyttää ajattelevan, että matematiikan opiskeluun kuuluu erilaisten ajattelutapojen etsiminen ja koettelu. Vaikuttaa siltä, että kirjoittaja olisi tietoinen paradigmaan liittymisen ehdoista, joihin kuuluvat käsitteellisten yleistysten ja tiedon menetelmän omaksuminen. Erilaisten ajattelutapojen ja näkökulmien tunnistaminen on pedagogisesti merkittävä seikka, koska silloin oppija voi ohjata itseään tai toista opiskelijaa eri ajattelutapojen ja näkökulmien kirjossa. Jos keskustelussa on vilpityn ilmapiiri, molemminpuolinen tavoitteellisuus ja yhteinen tehtävään sitoutuminen, on kysymyksessä pedagoginen dialogi (Kansanen 2004, 79). Kansanen mukaan *dialogia voidaan pitää koulukasvatuksen ihanteena*. Oteesta 15 löytyy aineksia myös metatason dialogiin.

Jos koulutuksessa halutaan lisätä syvempää oppimista eri oppiaineissa, olisivat heuristiikkoja suosivat opetusmenetelmät, kuten dialogit, varteenotettavia vaihtoehtoja. Opetuskeskustelut, lukupiirit, väittelyt, paneelit ja aivoriihet tarjoavat vaihtelevia ympäristöjä erilaisille dialogeille. Dialogien käyttäminen opetuksessa ei edistä ainoastaan heuristista oppimista, kriittistä ajattelua tai näkökulmien avartumista, vaan tarjoaa monipuolista empiiristä aineistoa oppimisen ja opiskelun tutkimiseen.

Opiskelupäiväkirjan kirjoittaminen edellyttää parhaimmillaan pohdiskelevaa kriittistä paneutumista opiskeltavaan aiheeseen,

kuten otteista 9–14 nähdään. Kirjoittaja on ikään kuin vastuussa sanoistaan ja asettaa itsensä alttiiksi kritiikille, olipa sitten lukijana hän itse tai joku toinen. Jälkeenpäin kirjoittaja voi seurata ja arvioida omaa ajatteluaan, oivaluksiaan ja virheratkaisujaan. Hakkaraisen ym. (2000, 188) mukaan päiväkirjan parhain anti on oppimisen tukemisessa, ajatusten jäsentämisessä ja itsearvioinnin kehittämisessä.

Yhteenveto

Opiskelutapojen ja -tottumusten arvioinnilla on monia tehtäviä, kuten informaation tarjoaminen erilaisista taidoista ja opintomenestyksestä. Moninaisissa vuorovaikutustilanteissa opettajan tarkat analyysit tarjoavat mahdollisuuden opiskelun tehokkaaseen tilannekohtaiseen ohjaukseen. Tässä artikkelissa on alustavasti kehitelty ymmärtämisen ja opiskelun diskurssianalyttistä arviointia.

Otimme näytteeksi opiskelupäiväkirjoista kaksi erilaista merkitysjärjestelmää eli diskurssia. Toinen diskurssista pohjautuu aiemmin opittujen muistisääntöjen mekaaniseen käyttöön tai muistisääntöjen muodostamiseen. Toisessa on luovaa ajattelua, joka on tunnusomaista tutkivalle oppimiselle (Pehkonen 2003, 37). Olemme nimenneet edellisen mekaanisten muistisääntöjen diskurssiksi ja jälkimmäisen heuristisen tunnistelun diskurssiksi.

Mekaaninen diskurssi toimii induktiivisen logiikan varassa, joka nojaa empiirisen todellisuuden esimerkkeihin eikä johda jäsentyneisiin tietojärjestelmiin. Heuristisen diskurssin ihmettelijät ovat puolestaan sisältöorientoituneita, ja he pyrkivät luovan tunnistelun avulla löytämään oikean ajattelutavan (1/20). Tällöin asioita pyritään ymmärtämään eikä vain tehdä niin kuin muutkin tekee, ymmärtämättä miksi (1/9). Esimerkiksi perustelut ristiriidan kautta kuuluvat tähän diskurssiin. Matematiikka ei ole muistisääntöjen joukko, eikä nollalla jakamisen sääntöä voida johtaa empiirisestä todellisuudesta, kuten otteessa 14 opiskelijakin huomaa. Toi-

saalta niin matematiikan opiskelu kuin käytännön elämäkin edellyttävät muistisääntöjen käyttöä riippumatta siitä, hallitaanko sääntöjen matemaattinen perustelu vai ei. Osaammehan käyttää jakokulmaa oikein, vaikka emme pystyisikään perustelevaan laskutoimituksen kaikkia vaiheita matemaattikkoja tyydyttävällä tavalla.

Diskurssianalyysi tuskin tarjoaa lisäarvoa sellaisten opetuksen perustekijöiden (Kansanen 2004) kuten tavoitteiden ja sisältöjen tarkasteluun. Parhaimmillaan diskurssianalyysi on opetustapahtuman keskeisimmän tekijän, vuorovaikutuksen, analyysissä, jossa tulkintojen avulla konstruoidaan ja kuvailaan opiskelustrategioita ja -tapoja. Diskurssianalyysin tulkinnot eivät vaadi suurta empiiristä aineistoa, sillä jo lyhyt puheen tai kirjoituksen katkelma saattaa paljastaa mielenkiintoisia yksityiskohtia vuorovaikutustapahtumasta. Tästä ovat esimerkkinä päiväkirjan 2 kirjoittajan muutaman lauseen katkelmat, joista nähdään, kuinka empiirismatemaattinen ongelma ratkaistaan ristiriidan avulla ja päädytään teoreettiseen yleistyksen. Löydettyjen diskurssien ei tarvitse välttämättä muodostaa koherenttia kuvausta tai merkitysjärjestelmää tutkittavasta tapahtumasta, vaan diskurssit voivat olla eri tavoin jäsenyneitä tai jopa ristiriidassa keskenään. Diskurssianalyysi voisi sopia myös niihin selvityksiin, joissa tutkitaan episteemisten ja ontologisten sitoumusten merkitystä oppimistapahtumassa. Sitoumusten merkitys tuskin on vähäinen, mutta sitoumusten *syville vesille* ei useinkaan haluta lähteä kuten von Wright (1996, 354) asian ilmaisee.

Tätä artikkelia hallitseva formaalin matematiikan näkökulma on yksi näkökulma matematiikan opiskeluun. Koulumaailmassa opettajalla on oltava monta näkökulmaa opetettavassa aineessa. Esimerkiksi ammatillisessa koulutuksessa on otettava huomioon, että monissa käytännön ammateissa riittää pelkkä peruslaskutoimitusten hallinta. Joillakin ammattialoilla tarvitaan tilastomatematiikan hallintaa ja toisilla vaikkapa differentiaali-

ja integraalilaskentaa. Erikoisaloilla matematiikan vaativuustaso voi vaihdella paljonkin. Eri alojen ammattilaisia kouluttaessaan tavalinen opettajakin voi diskurssianalyysin avulla arvioida opiskelua ja oppimisen etenemistä sekä tehostaa työnsä suunnittelua. Diskurssianalyysi soveltuu siis tutkijan ja opettajan käyttöön; ehkä suurin hyöty siitä koituisi omaa työtään tutkivalle opettajalle.

Lähteet

- Aaltola, J. 1989. Merkitys opettamisen ja oppimisen näkökulmasta. Jyväskylän yliopisto. *Studies in education, psychology and social research* 69.
- Ahtee, M. 1998. Arkitieto ja tieteellinen tieto luonnontieteiden opetuksessa. *Kasvatus* 29 (4), 358–362.
- Atjonen, P. 2003. Kiikarissa akateeminen ydin. *Kasvatus* 34 (5), 445–447.
- de Guzmán, M. 1990. Matemaattisia seikkailuja. Suomentaja M. Näätänen. Loimaa: Finn Lectura.
- Edwards, D. 1993. But what do children really think? Discourse analysis and conceptual content in children's talk. *Cognition and Instruction* 11 (3 & 4), 207–225.
- Ernest, P. 1991. *The philosophy of mathematics education*. Hampshire: Falmer.
- Gergen, K. 1994. *Realities and relationships. Soundings in social construction*. Cambridge: Harvard University Press.
- Greene, J. 1977. *Ajattelu ja kieli*. Suomentaja Ulla Roponen. Espoo: Weilin+Göös.
- Hakkarainen, K., Lonka, K. & Lipponen, L. 2000. Tutkiva oppiminen: Älykkään toiminnan rajat ja niiden ylittäminen. Porvoo: WSOY.
- Hiebert, J. & Carpenter, T. 1992. *Learning and teaching with understanding*. Teoksessa D. A. Grouws (toim.) *Handbook of research of mathematics learning and teaching*. New York: Macmillan, 65–97.
- Hiidenmaa, P. 2000. Lingvistinen tekstintutkimus. Teoksessa K. Sajavaara & A. Piirainen-Harsh (toim.) *Kieli, diskurssi & yhteisö*. Jyväskylän yliopisto. Soveltavan kielentutkimuksen keskus. Teoriaa ja käytäntöä 2, 161–190.
- Hobbes, T. 1962/1651. *Leviathan*. New York, London: Collier MacMillan.
- Jokinen, A., Juhila, K. & Suoninen, E. 1993a. Diskursiivinen maailma. Teoreettiset lähtökohdat ja analyttiset käsitteet. Teoksessa A. Jokinen, K. Juhila & E. Suoninen (toim.) *Diskurssianalyysin aakkoset*. Tampere: Vastapaino, 17–47.
- Jokinen, A., Juhila, K. & Suoninen, E. 1993b. Diskurssianalyysin aakkoset. Tampere: Vastapaino.
- Jokinen, A., Juhila, K. & Suoninen, E. 1999. *Diskurssianalyysi liikkeessä*. Tampere: Vastapaino.
- Judén-Tupakka, S. 2003. Portfolio oppimisvälineenä – oppimisen sekä opettamisen kehittäminen ja evaluatio. Teoksessa H. Sinevaara-Niskanen & R. Rajala (toim.) *Kasvatuksen yhteisöt – uupumista, häirintää vai yhteisöllistä kasvua? Kasvatustieteen päivien 2002 julkaisu*. <<http://ktk.ulapland.fi/kasvatuspaivat>> Luettu 21.–22.11.2002
- Juhila, K. 1993. Miten tarinasta tulee tosi? Faktuaalistamisstrategiat viranomaispuheessa. Teoksessa A. Jokinen, K. Juhila & E. Suoninen (toim.) *Diskurssianalyysin aakkoset*. Tampere: Vastapaino, 151–188.
- Kaartinen, S. 2003. Learning to participate – Participating to learn in science and mathematics classrooms. *Acta Universitatis Ouluensis E* 64.
- Kansanen, P. 2004. *Opetuksen käsitemaailma*. Jyväskylä: PS-kustannus.
- Kumpulainen, K. 2002. Yhteistoiminnallinen oppiminen vertaisryhmässä: Tutkimuskatsaus. *Kasvatus* 33 (3), 252–265.
- Leinonen, J. 2002. Ymmärtäminen – jäsentynyttä tietoa. *Kasvatus* 33 (5), 475–483.
- Lonka, K. & Lonka, I. 1991. Aktiivisia ja prosessipainotteisia työtapoja. Teoksessa K. Lonka & I. Lonka (toim.) *Aktivoiva opetus. Käsikirja aikuisten ja nuorten opettajille*. Helsinki: Kirjayhtymä, 28–45.
- Nevanlinna, R. 1963. *Johdatus suhteellisuusteoriaan*. Porvoo: WSOY.
- Pehkonen, E. 2000. Ymmärtäminen matematiikan opetuksessa. *Kasvatus* 31 (4), 375–381.
- Pehkonen, E. 2003. Tutkiva matematiikan oppiminen peruskoulussa. *Tieteessä tapahtuu* 21 (6), 35–38.
- Peirce, C. 1992. *Deduction, induction and hypothesis*. Teoksessa N. Houser & C. Kloesel (toim.) *The essential Peirce. Selected philosophical writings 1 (1867–1893)*. Bloomington: Indiana University Press, 186–199
- Potter, J. & Wetherell, M. 1987. *Discourse and Social Psychology. Beyond attitudes and behaviour*. London: Sage.
- Sarja, A. 2000. Dialogioppinen ryhmä- ja yksilötasolla hoitotyön kontekstissa. *Aikuiskasvatus* 20 (2), 99–108.
- Sfard, A. 2000. Steering (dis)course between metaphors and rigor: Using focal analysis to investigate an emergence of mathematical objects. *Journal for Research in Mathematics Education* 31 (3), 296–327.
- Wittgenstein, L. 1953. *Philosophical investigations*. Oxford: Blackwell.
- von Wright, G. H. 1998. Filosofiasa on Russell voittanut Wittgensteinin. *Niin & Näin* 5 (3), 6–12.
- von Wright, J. 1996. Oppiminen selviytymiskeinona. *Psykologia* 31 (5), 351–358.

Saapunut toimitukseen 28.6.2004

Hyväksytyt julkaistavaksi 12.1.2005

D

UNDERSTANDING AND MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING

Leinonen, Jorma

University of Lapland

The focus of this paper is to study the state and process of understanding and its relationship with mathematical problem solving in the learning process. Understanding has, in this context, four modes: conceptual knowledge, grasping meaning, comprehension and accommodation. The function of those modes is to give the background and conceptual instruments for thinking, to interpret the information, to synthesize the knowledge, to integrate the message into permanent memory, and to reorganize the cognitive structure. Understanding plays an essential role in problem solving, providing resources for reasoning. On the other hand, the process of problem solving produces new strategic and factual information, thereby increasing the learner's conceptual understanding.

ZDM Classification: C 30

1. Introduction

Understanding has methodological, psychological, epistemological and linguistic aspects in science (von Wright 1971). The educational view of understanding has its own perspective on understanding in the learning process: epistemological, cognitive, conative and affective aspects (Koskinen 2009). Only the first two fall within the scope of this paper. For decades, the development of mathematical understanding has posed vexing problems for mathematics educators and researchers (Kilpatrick 2009). In particular, the construct of understanding has a complicated history in both teaching and research. Because the term “understanding” is ambiguous, one task is to get a clearer picture of its meanings. Another question is how the concept of understanding can be connected to other relative concepts of learning, especially to thinking and problem solving. A third question is how to develop and promote mathematical understanding in teaching.

There is broad agreement that understanding and problem solving are the central objects in the mathematical curriculum because of the benefits they provide the learner. For example, they have been part of the curriculum for Finnish compulsory education since 1970 (NBE 1970). This article is a theoretical study introducing a “learning with understanding” approach and showing that understanding is a necessary element in problem solving.

2. The meaning of understanding

The term “understanding” is an old English word which literally means “standing under”; it is a static foundation for human intellectual life. According to Marton

et al. (1993) understanding signifies “having a view of things” or “a way of seeing something” or “gaining meaning”. The word “understanding” also connotes a transition from one state of knowledge to another. “Understanding” is almost synonymous with the old, Latin- and French-derived word “comprehension”. The verb “comprehend” is “comprehendere” in Latin and it means “to grasp together” (Paersall 2003, 293). The verb “comprehend” implies a mental process, and the verb “understand” is the result of this process. “Comprehension” also has the connotation of “compression”, referring to an ability to compress data or synthesize the information (Marzano 2001, 34). From a linguistic point of view, “comprehension” is synonymous with “intension”.

Understanding can be a disposition or an activated mental state. To understand something means that the subject is supposed to have a conception of the nature of the thing or intentional activity that attends to the object. Understanding is possible if an individual possesses mental implements such as concepts, schemes or strategies. The above-mentioned implements are meanings because they refer to objects and give meaning to an object for the learner. Learning with understanding operates by using and producing meanings and is therefore called “meaningful learning”. First-order meanings (concepts, schemes and strategies) are the intentional objects in the second-order learning process. The transition from the first level to the second is a challenge because the learner does not have a view of the objects and the implements to give meanings to them. According to Ausubel & Robinson (1967), the transition corresponds to discovery learning because a learner has to create new instruments for thinking: meanings and views.

Pirie & Kieren’s (1994) hierarchical model describes how an individual’s understanding develops from one level of understanding. Each level is a process where the learner’s understanding is implicit at first, later becoming more conscious and explicit. The knowledge of a topic develops from scattered parts into a coherent structure. When a learner has internalized a matter at one level of understanding, he or she is ready to proceed to the next level. The progress from one level to another is not necessarily linear: an individual may regress in his or her understanding. In Sfard’s (1994) terms, the way of thinking changes “from an operational to a structural embodied schema” within each level, and knowledge changes from processes to objects.

3. Modes of understanding and problem solving

At least since Locke (1693), understanding has been considered to be the power of thinking and a result of thinking. Understanding is an important goal in education because of its positive consequences. It generates information, promotes re-

membering, reduces the amount of information that must be remembered, enhances transfer and influences beliefs (Hiebert & Carpenter 1992, 74-77).

In this article we take a theoretical view of the changing states of understanding and how to reach those states through productive processes. The processes and states are called “modes of understanding” (Fig. 1).

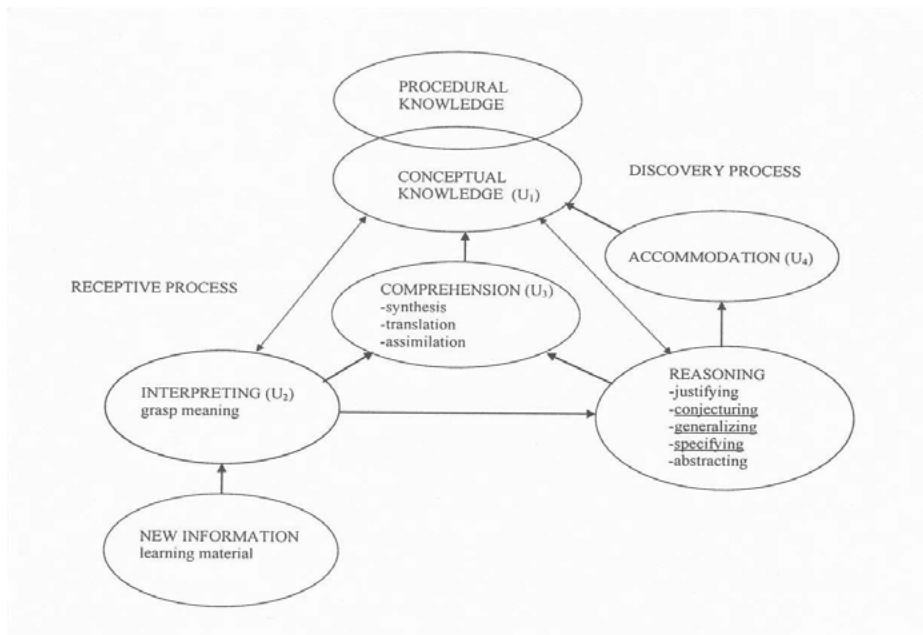


Figure 1: Modes of understanding in the learning process.

There are four modes of understanding: conceptual knowledge (understanding₁), interpreting (understanding₂), comprehension (understanding₃), and accommodation (understanding₄).

Understanding₁

Understanding₁ represents the traditional conception of understanding where it is seen as potential ability in a dualistic way. An individual’s mind is in one of two states: the individual either understands₁ something or does not understand₁. The function of understanding₁ is information storage, to provide an implementation for mental processes, a framework for mental acts.

Understanding₁ refers to the cognitive structure with nodes and links. Hiebert and Carpenter (1992) state that the degree of understanding₁ can be defined as a number and the strength of connections in existing networks. Furthermore they (1992, 67) claim: “A mathematical idea or procedure or fact is understood if it is part of an internal network. More specially, the mathematics is understood if its mental representation is part of a network of representations”. According to

Skemp (1976), understanding₁ refers to the ability to answer the question “Why” along with the skills to analyze assertions.

Nowadays there is an emphasis on structuring processes in understanding₁. The traditional learning process is to increase the learner’s information so that he or she has broader knowledge of topics; incoherent knowledge becomes a condensed structure, thereby increasing the quality of understanding₁. Furthermore, understanding₁ can be seen as a never-ending stairway where a subject can go higher and higher with increasing generality of knowledge (Pirie & Kieren 1994; Sfard 1991). Thus we cannot speak about complete understanding₁ of a matter; it is always a degree of understanding₁. On the other hand, we can change perspectives and, depending on the view chosen, understand₁ the same thing in different ways (Gray & Tall 1993; Gray & Tall 2001). An extreme change of understanding₁ leads to a change in the paradigm (Kuhn 1963). For example, the subjective view of mathematics has undergone a radical revolution when the learner’s evidence for his or her statements changes from empirical experience to deductive rules. In summary, the state of understanding₁ gives a way of seeing something, and the process of understanding₁ is an endless process of structuring.

Understanding₂

The function of understanding₂ is to interpret learning material in the framework originated from understanding₁. “People continually try to understand and think about the new in terms of what they already know” (Glaser 1984, 100). The interpretation is also called “grasping the meaning”, and attention is focused on the meaning. Meaning is not an isolated entity but must be seen in a certain, relevant context. There are several ways to use the concept of meaning (Aaltola 1989); in this article the following ones are in use:

1. The ideational meaning of a symbol refers to mental entities like concepts, propositions, schemes, models, etc. Concepts are the subjective consciousnesses of attributes.
2. Referential meaning describes relations between symbols and objects.
3. Holistic meaning refers to the position of an entity in the structure of relevant entities. For example, the meaning of a concept is its position in the relevant theory.

In the linguistic view of Fodor (1998, 4), the theory of meaning must answer the question ‘What does it mean to understand a language?’ To understand₂ a sentence means that an individual gets the conception of the content of the sentence. The sentence is not only a vehicle transporting the content that is included “in form”, but a person must interpret “the form” to get the message. According to the picture theory of language (Wittgenstein 1922), the following conditions are necessary in order to grasp the meaning of a sentence:

1. The symbols must refer to objects.
2. The structure of symbols is the content of the sentence.
3. The combination of the above-mentioned facts is the meaning-content of the sentence.
4. The sentence is true if it has the relevant reference to objects and the relationship between the structures of sentence and objects is isomorphic.
5. The projection process from the sentence to the combination of objects is a mental act. The result at the mental level is an internal representation of things.

If the learner has grasped the meaning of the learning material, the next step is to store it in permanent memory. According to Ausubel & Robinson (1968), a learner grasps the meaning of material between the extremes of receptive and discovery learning.

Understanding₃

The function of understanding₃ or comprehension is to transfer the acquired meaning-content to permanent memory in relevant fashion. For instance, Wachsmuth (1985, 45) describes understanding₃ as follows: “to understand something means that an individual can organize the matter in his or her own system of categories”. A condition for learning with understanding₃ is that there is meaningful material that is relevant reliable to the learner’s cognitive structure. The learner must possess ideas that are relevant to the learning material and must have the intent to incorporate the new information into his or her cognitive structure (Ausubel & Robinson 1968).

According to Marzano (2001, 34-35), three processes are involved in comprehension:

1. The synthesis compresses information to its key elements, making a distinction between essential and extraneous information. The process generalizes the concepts and propositions and designs the structure of the information so it is relevant to the learner’s prior knowledge structure.
2. The transformation or representation process creates a symbolic analogy for the knowledge. The modes of inner representation are symbolic and imaginary (Paivio 1971).
3. The assimilation process incorporates the new information into the prior knowledge structure of the individual.

Comprehension does not create new information, but is responsible for translating knowledge into an appropriate form for storage in permanent memory and integration into the prior knowledge system.

Understanding₄

Unlike comprehension, which integrates information, the process of understanding₄ reorganizes the cognitive structure itself. This mode of understanding can produce new insights and be used in new situations. Piaget calls this change “accommodation” (Linn & Barbules 1993) and says it includes the “reasoning” extension that is located in the discovery region (Fig. 1). The new information, for example from problem solving, can be integrated into the cognitive structure via the comprehension or accommodation processes.

The accommodation is radical when the learner’s view of mathematics or even his or her worldview changes (cf. Merenluoto 2005). One’s view of mathematics consists of a group of features that have fundamental influences on accommodation: beliefs, attitudes, affects, etc. For instance relevant beliefs could promote learning, but irrelevant beliefs cause difficulties to learn mathematics (Pehkonen & Törner 1996). Affects are important factors in mathematical thinking and learning (Hannula 2004), but they do not fall within the scope of this paper.

Understanding and problem solving

If the interpretation is incomplete and the learner does not grasp the meaning of the learning material easily, he or she must begin to reason about the task more thoroughly. Learning through reasoning is creative in nature and is called “discovery learning” (Fig. 1). The mental acts involved in reasoning are interpreting, inferring, searching, reflecting, conjecturing, proving, explaining, justifying, convincing, structuring, generalizing, predicting, specializing, abstracting, etc. (Harel 2009). These acts are performed in every domain of life, not only in science and mathematics. The repertoire and extension of the acts are different in different disciplines. The relevant acts must be selected for use in, for example, problem solving or proving in mathematics. Typical acts in mathematical problem solving are conjecturing, convincing, generalizing and specializing (e.g., Pehkonen 2000).

Harel (2009) sees mathematics as consisting of two complementary subsets:

1. The first subset is a collection of structures consisting of particular axioms, definitions, theorems, proofs, problems, and solutions. This subset consists of all the institutionalized ways of understanding mathematics throughout history.
2. The second subset consists of all the ways of thinking that are characteristic of the mental acts whose products comprise the first subset.

The fundamental idea in this definition is the complementary nature of thinking and understanding. According to Harel (2009), “Students must practice reasoning in order to internalize, organize, and retain ways of understanding and ways of thinking.” Studies have shown that repeated reasoning increases skills and understanding in mathematics (e.g., Leinonen & Pehkonen 2009). Another study in the mathematics classroom shows that practice with open-ended problems is an effective way of learning mathematical thinking and understanding (Pehkonen 1997). We can see problem solving as a tool to teach various mathematical subjects (Schroeder & Lester 1989), and understanding provides resources for problem solving (Schoenfeld 1985, 46-67)

4. Discussion

In this article we have introduced a view of the “learning with understanding” approach, which is almost synonymous with “meaningful learning”. Understanding and meaning are, in fact, like Siamese twins. According to Fodor (1998, 4), the theory of meaning must answer the question “What does it mean to understand a language?” There have long been disagreements concerning what should be focused on first in teaching mathematics: computation skills or understanding. The same problem has been discussed using the terms “procedural knowledge” and “conceptual knowledge” (e.g., Haapasalo 2003). These discourses have not provided a crucial solution for promoting mathematical learning.

Kilpatrick (2001) proposes that mathematical proficiency develops optimally by keeping the different “strands” of learning and teaching in balance. According to Harel (2009), understanding and thinking are complementary entities in the learning process. Furthermore, Harel considers problem solving as a tool to use in constructing mathematical objects. Open-ended problems, as an effective teaching method, are a serious alternative for promoting mathematical thinking and understanding in classroom teaching (e.g., Pehkonen 1997).

Understanding is an essential factor in solving problems. In learning, understanding and thinking processes are a necessary pair in problem solving. Four epistemic modes of understanding are introduced in this article. The nature and function of the above-mentioned modes vary at different stages of problem solving. For example, in order to solve a problem one must first grasp the meaning of the problem within its setting or broader context (the problem setting). On the other hand, the process of problem solving produces new strategic and factual information, thereby increasing the learner’s propositional knowledge. The product of problem solving is understood in the comprehension or accommodation process if the product is meaningfully integrated into the learner’s cognitive structure. The combination of understanding and problem solving presents a big challenge

in the study of teaching and learning. Therefore, extensive co-operation between teachers and researchers is needed at the theoretical and practical levels.

References

- Aaltola, J. (1989). Merkitys opettamisen ja oppimisen näkökulmasta. [Meaning from the perspective of teaching and learning]. *Studies in education, psychology and social research* 69. University of Jyväskylä.
- Ausubel, D. P. & Robinson, F.G. (1968). *School Learning: An Introduction to Educational Psychology: A Cognitive View*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Fodor, J.A. (1998). *Concepts*. New York: Oxford University Press.
- Glaser, R. (1984). Education and thinking: The role of knowledge. *American Psychologist*, 39, 93-104.
- Gray, E. & Tall, D. (1993). Success and Failure in Mathematics: The Flexible Meaning of Symbols as Process and Concept. *Mathematics Teaching*, 142, 6-10.
- Gray, E. & Tall, D. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic precepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. In M. van den Heuvel-Panhuizen (ed.), *Proceedings of the 25th conference of the international group for the psychology of mathematics education (PME)*, Vol. 3, Utrecht, 65-72.
- Haapasalo, L. (2003). The conflict between conceptual and procedural knowledge: Should we need to understand in order to be able to do, or vice versa? In L. Haapasalo & K. Sormunen (eds.), *Towards meaningful mathematics and science education. Proceedings on the XIX symposium of the Finnish mathematics and science education research association*. University of Joensuu. *Bulletins of the Faculty of Education* (86), 1-20.
- Hannula, M.S. (2004). Affect in mathematical thinking and learning. *Annales universitatis turkuensis*. Ser. B, Tom. 273, Humaniora. Turku: Painosalama Oy
- Harel G. (2009). What is Mathematics? A Pedagogical Answer to a Philosophical Question. In R. B. Gold & R. Simons (eds.), *Current issues in the philosophy of mathematics from the perspective of mathematicians*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America.
- Harter, S. (1980). The perceived competence scale for children. *Child Development*, 51, 218-235.
- Hiebert, J. & Carpenter, T.P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. In D.A. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics learning and teaching*. New York: McMillan (pp. 65–97).
- Kilpatrick, J. (2001). Understanding mathematical literacy: the contribution of research. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 101–116.
- Koskinen, R. (2009). Outlining the development of the theory of meaningful learning as a conceptual framework for teaching mathematics. In C. Winslow (ed.), *Nordic Research in Mathematics Education, Proceedings from Norma08 in Copenhagen*

- April 21 – April 25, 2008. Rotterdam: Sense Publishers, pp. 339-344.
- Kuhn, T.S. (1963). *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Leinonen, J. & Pehkonen, E. (2009). Teaching for understanding: A case of elementary teacher students. In J. Novotná & H. Maraová (eds.), *The Development of Mathematical Understanding, Proceedings of International Symposium on Elementary Maths Teaching 23-28.8.2009*. Prague: Charles University, pp. 155-162.
- Linn, M. & Barbules, N. (1993). Construction of knowledge and group learning. In K. Tobin (ed.), *Practice of constructivism in science education*. Washington, DC: AAS, pp. 91-119.
- Locke, J. (1995). *An essay concerning human understanding*. New York: Prometheus Books.
- Marton, F., Dall'alba, G. & Beaty, E. (1993). Conception of learning. *International Journal of Educational Research*, 19 (3), 277-300. Oxford: Pergamon Press.
- Marzano, R.J. (2001). *Designing a New Taxonomy of Educational Objectives*. London: Sage Publication Ltd.
- Merenluoto, K. (2005). Discussion about conceptual change in mathematics. *Nordic Studies in Mathematics Education* 10 (2), 17-33.
- NBE (1970). Peruskoulun opetussuunnitelman mietintö. Opetussuunnitelman perusteet. [Report on compulsory education curriculum. Basis for the curriculum] Komiteamietintö 1970: A4. Helsinki: Valtion painatuskeskus.
- Paersall, J. (ed.) (2003). *Concise Oxford English Dictionary*. New York: Oxford University Press.
- Paivio, A. (1971). *Imagery and verbal processing*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Pehkonen, E. (ed.) (1997). *Use of open-ended problems in mathematics classroom*. University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research Report 176.
- Pehkonen, E. (2000). Ymmärtäminen matematiikan opetuksessa. [Understanding in the teaching of mathematics]. *Kasvatus* 31 (4), 375-381.
- Pehkonen, E. & Törner, G. (1996). Mathematical beliefs and different aspects of their meanings. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 28 (4), 101-108.
- Pirie, S. & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterize it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26 (2-3), 165-190.
- Schroeder, T.L. & Lester, F.K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In R. Traflon (ed.), *New Directions for Elementary School Mathematics*, 31-42. NTCM 1989 Yearbook. Reston, VA: NCTM.
- Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.
- Sfard, A. (1994). Reification as the Birth of Metaphor. *For the Learning of Mathematics*

14 (1). Vancouver: FLM Publishing Association.

Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 22-26.

Wachsmuth, I. (1985). *Mathematische Fertigkeiten und Mathematikverständnis*. Bad Salzdetfurth: Verlag Franzbecker.

Wittgenstein, L. (1922). *Tractatus Logico-Philosophicus*. London: Routledge & Kegan Paul.

von Wright, G.H. (1971). *Explanation and Understanding*. Ithaca: Cornell University Press.

E

TEACHER STUDENTS' IMPROVEMENTS IN CALCULATION SKILLS AND UNDERSTANDING IN THE CASE OF DIVISION

Jorma Leinonen & Erkki Pehkonen

University of Lapland, University of Helsinki

Abstract: In many studies in Finland, it has become out that elementary teacher students have severe lacks in mastering of division and understanding its functional principle. In this paper, it will be presented a teaching method where students via independent pondering could get an insight on the principles of division, and thus their calculation skills will be developed. To teacher students at the University of Lapland were offered two possibilities to accomplish the basic course in mathematics: an examination or writing accounts. Results dealt with here are from four years experimenting (N = 220). According to the tests in the beginning and at the end of the course, the traditional teaching method with examination seemed to be ineffective, whereas the pondering method with account writing produced clearly better results.

One of the primary goals of the Finnish comprehensive school curriculum in mathematics is to make pupils understand and master basic calculations (NBE 2004). Division is the most complex operation children have to learn in elementary school mathematics, as it requires good skills in other basic operations. But research has shown that Finnish students have problems understanding division in upper secondary school (e.g. Hellinen & Pehkonen 2008), and even in university-level of elementary teacher education programs (e.g. Kaasila & al. 2010).

For elementary teacher education it is a challenge, since prospective teachers should have the skills and knowledge expected in the curriculum (NBE 2004), in order to be successful in their teaching. A minimum requirement is fluent calculation skills, but teachers should be ready to explain in teaching situations the principles of calculation operations, if needed. This demand expects the mastering of algorithms on the level of understanding (Leinonen & Pehkonen 2009). Here we present a teaching method that activates students' own thinking, and thus helps them to develop reasoned knowledge on division algorithm, in order to understand it properly.

THEORETICAL FRAMEWORK

One goal for mathematics teaching in the comprehensive school is to develop pupils' mathematical thinking (NBE 2004). Other central goals in the curriculum are good calculation skills, adapting mathematical concepts and understanding.

Understanding

Mathematical understanding can be characterized as a continuous process that is connected with a certain person, a mathematical content domain and a special environment (Hiebert & Carpenter 1992). Mathematical understanding answers the question "Why?" and entails, among other factors, the skills required to analyze mathematical statements. Within the last twenty years, researchers have developed

theories of mathematical understanding as a dynamic process, how an individual's mathematical understanding develops (e.g. Pirie & Kieren 1994). In the Pirie & Kieren model, understanding is seen as a process where an individual can progress from one level of understanding to the next. The progress from one level to another is not necessarily linear: an individual may regress in his/her understanding.

If we go deeper into the concept of understanding, it seems to be more complicated. For example, Leinonen (2011) introduces the four modes of understanding: conceptual knowledge, grasping meaning, comprehension and accommodation. The function of those modes is to give the background and conceptual instruments for thinking, to interpret the information, to synthesize the knowledge, to integrate the message into permanent memory, and to reorganize the cognitive structure. These ideas he has discussed in detail in the publication (Leinonen 2011).

The definition of understanding is difficult also therefore, since its meaning depends on the view point selected. Understanding has linguistic, epistemological, cognitive and social dimension that are totally involved in learning. In the paper at hand understanding is seen as a cognitive process that results structured knowledge (cf. Hiebert & Carpenter 1992; Kilpatrick 2009).

Polarisation of knowledge

In learning theories, mathematics is often described as polarized knowledge: procedural and conceptual knowledge (e.g. Hiebert & Lefevre 1986) or operational and structural knowledge (e.g. Grey & Tall 1993, Sfard 1994). It has been seen that such a rough two-division leaves a gap between different kinds of knowledge, and it could form a pedagogical problem. In the literature, it is often shown like Sfard (1994) and Skemp (1976) that procedural knowledge lacks a personal grip and reasoning that belong to conceptual knowledge: it is "rules without reasons". Procedural knowledge offers readiness to routine performance, and thus mathematics can be seen by an individual only as manipulation of number symbols.

On the pedagogical viewpoint studying mathematics can be seen instead of dualistic viewpoint as a complementary event where procedural and conceptual knowledge develop together accomplishing each other (Hiebert & Lefevre 1986). One possibility to reduce this gap is individual pondering that is typical for mathematics (cf. "adaptive reasoning" by Kilpatrick 2009) as a contrary to remembering memory rules ("rules without reasons").

Division

Division is an important but complex arithmetical operation in the mathematical education of future elementary teachers. The long division algorithm begins from the left, unlike other basic operations, and it requires estimation skills at every step. Furthermore, division by a decimal number requires an ability to expand the fraction given by the division task, and to determine the place of the decimal point. Earlier studies have shown that students in education consistently display weakness in

division (e.g. Simon 1993, Campbell 1996, Merenluoto & Pehkonen 2002, Leinonen & Pehkonen, 2009; Pehkonen & Kaasila, 2009, Kaasila & al. 2010).

Division is an essential arithmetical operation to consider in teacher education because many prior studies show that a part of elementary teacher students have lacks of understanding division (e.g. Tirosh & Graeber 1990, Simon 1993). One reason for the shortage of understanding seems to be primitive models of division (e.g. Simon 1993). For example, students use only the strategy of partitive division in their calculation. Other important components for insufficient understanding of division are 1) weak understanding of remainder, 2) insufficient understanding of the connections between mathematical operations, 3) difficulties in explicating and giving reasons for strategies used in reasoning and 4) staying on the integer level (Kaasila & al. 2010).

Focus of the paper

The purpose of this paper is to inquire whether activating teaching methods produce better skills in division than traditional teaching. Students were encouraged to reflect on the principles of the long division algorithm and to write about this process of reasoning in their accounts to the instructor during their mathematics course.

IMPLEMENTATION OF THE STUDY

In the LOMA project (Elementary teachers' mathematics), financed by the Academy of Finland (project number #8201695), data was gathered with a test measuring students' calculation skills and understanding (cf. Kaasila & al. 2008). The same test was used in this study.

Participants

The participants in the study were 268 students of elementary education at the University of Lapland (Rovaniemi, Finland) from four different courses in 2007–2010. Approximately one third of them had studied advanced mathematics in upper secondary school, whereas two thirds had taken the general mathematics course.

Indicators

The test used in the LOMA project was also administered here to gather data from a group of 268 elementary teacher students at the University of Lapland in 2007–2010. Additional empirical data offered also accounts written by a smaller group of students that wanted to accomplish the course without an examination.

The students were tested in division both in the beginning and at the end of the course. The students were given 45 minutes for each test, and they were not informed about the tests beforehand. Three division tasks were selected for a closer study. The purpose of the testing was to analyze how much the students' division skills had improved during the course. The students were not allowed to use calculators during the test, and all calculations had to be written down.

Data analysis

Altogether 220 students participated in both tests (the start and end tests). Here we focus only on the papers of these students. The tasks in the test were scored on the scale 0, 1, 2 in such a way that 0 point was given for a totally wrong answer, and 2 points for a totally correct answer. One point was given for a partly correct answer.

For the points of the tasks, mean values were calculated. Students' development in

The start test:	The end test:
Task 1. Calculate with a long division $3159 : 13$.	Task 1. Calculate with a long division $27408 : 12$.
Task 2. Reduce as long as possible $96/504$.	Task 2. Reduce as long as possible $144/1584$.
Task 3. Calculate with a long division $1.488 : 0.24$.	Task 3. Calculate with a long division $2.618 : 0.14$.

calculation was evaluated with the changes in the mean values for each task. Here we concentrate on students' performance in following three tasks, and consider them more closely.

The papers were checked by the course teacher, and in addition by another mathematics teacher, too. The accounts were interpreted by two researchers and a mathematics teacher. After discussions they came to an agreement. The differences in calculation tasks between different groups were tested with the U-test.

The influential factor

The students participated in a basic, six-week course of mathematics at the University of Lapland from four different years in 2007–2010. Each week they had a 90-minute lecture and a follow-up 90-minute exercise in small groups. Both multiplication and division with rational numbers were topics in the lecture and exercise of one week. These operations were taught in the case of integers and decimal numbers. The lecturer used the models of both quotitive and partitive division. He gave the students several examples to demonstrate the principles of the long division algorithm.

In accomplishing the basic course in mathematics of the elementary teacher program at the University of Lapland, it was offered in each course in 2007–2010 two alternatives: the examination after the course or writing accounts (of a couple of pages) during the course on the topics dealt with. All students were expected to participate actively in the lectures and small groups. The topics of the course were i.a., as follows: basic calculations, percentages, number systems. Two double-hour units were used for division, one for a lecture and the other one for a small group.

The students received from their accounts regularly a written feedback and more instructions for accounts. Messages between the teacher and the students were sent by e-mail. Additionally, there were a couple of personal discussions. All students had in daily use a personal computer that the university has offered them.

In the beginning of the course, some ideas were given for encouraging the students to independent thinking and writing accounts:

The most important is wondering. Nothing is automatically clear. There are no wrong why-questions, only answers could be wrong. Try to remember what was difficult in mathematics or what kind of problems you struggled with during your school mathematics. Ponder the reasons for using calculation rules used, and write your pondering into the account.

For division there were some more accurate hints:

Think by yourself, and then answer the following questions: Why is it important to estimate the result of the division before beginning to divide? Why should division begin always from the left hand side? Ponder the meaning of separate phases in division. How will you begin when a decimal number should be divided by a decimal number? What is the place of the decimal point in the quotient, and how can you reason the place? What is a difference in division, if you will use another number system?

RESULTS

In the years 2007–2010 at the University of Lapland, there were altogether 268 elementary teacher students, and of them 220 participated in the start and end tests.

Table 1. The number of teacher students in different years.

	2007	2008	2009	2010	Altogether
The account group	12	13	20	12	57
The examination group	36	46	30	51	163

U-test showed that there were no statistical significant differences between different years. Therefore, the student total for four years has been dealt with together.

Almost all participated students passed the course during the same year. Thus we consider two groups of teacher students who were accomplishing the course with different methods: the account group (N = 57) and the examination group (N = 163).

Solution frequencies

According to the tests (Figure 1), the differences between the groups in starting situation were only a couple percentage units. In the three tasks, the differences were deviating. In the first one (division of natural numbers), the start points of the students were almost in the top, but in the third one (division of decimal numbers) the corresponding mean value was under the half of the maximum value. In the second task (reducing), the start points were between the other ones.

In all three tasks, the rise of the mean value in the test points was bigger in the account group than in the examination group (Figure 1). According to the t-test, the difference of mean values was only in the results of the third task statistically significant (level .05; $t = 2.051$; $df = 218$).

The most common mistake in the first test was that in the third task, the quotient obtained was divided by the expander. This mistake was very rare in the second test. In the second test (division of decimal numbers), some students multiplied the divisor and the dividend with different numbers before the division algorithm. For example, in the task $2.618 : 0.14$ the dividend was multiplied by 1000 and the divisor by 100. Furthermore, some students had difficulties in multiplication tables, in some papers were also the remainder divided by the divisor.

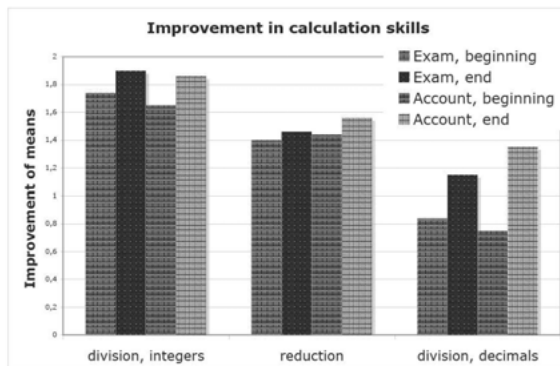


Figure 1. The mean values of the test scores in the start and end tests in 2007–2010 (the account group N = 57 and the examination group N =163).

Comments on accounts

In writing accounts, students were first very careful, and discussed more mathematics teaching in school than the topics dealt with in the course. They described their own relationship to mathematics during the school time, and most of them had negative memory pictures. They remembered learning-by-heart and fear before examination. Therefore, accounts offered to some of them a released way to study, since they were not in need to fear the examination. School received also much critics for constant hurry and performance-centeredness.

Most of the accounts could be grouped into one of David Tall’s three worlds of mathematics (cf. Gray & Tall 1993), as one can read in the following quotations:

- (1) The embodied world:
"I figure minus numbers always with a thermometer" (Paul).
"The fourths are always easy to think with a pizza model" (Julia).
- (2) The symbolic world:
"Mathematics is full of rules, and every now and then I have a feeling that there is no logic. However, they evidently have, but their understanding will demand a deeper diving into the world of mathematics" (Julia).
- (3) The formal world:
"Somebody asked why in dividing fractions one should change the place of the numerator and the denominator in the latter fraction" (Josh).

In several accounts, it can be read that peaceful pondering and writing accounts has cleared up the principles of the division algorithm. For example, it became clear to Julia and Henry that the quotient is not allowed to be divided by the expander:

"For me it cleared up, among others, that if one divides with a decimal number, the divider and the dividend can be expanded to integers, and that after division one needs not to change the quotient. When I have once seen it, the rule seems to be self-evident" (Julia).

"Also for myself it was important to notice that after division one should not divide the quotient with the expander" (Henry).

In many comments it became clear that the writing of accounts encouraged students to own thinking and discussions. Additionally, the writing of accounts was a welcome alternative for an examination. For example, Anna wrote, as follows:

"I must say that the course has given more than I dared to expect ... Accounts offered for our group of girls more opportunities to stop and think" (Anna).

DISCUSSIONS

It seems that, based on the results of the starting tests, the goals of the comprehensive school curriculum (NBE 2004) have not been fulfilled in the case of good calculation skills even in all of the best of the students. And there are severe gaps of calculation skills of students in the elementary teacher education (e.g. Kaasila & al. 2010).

An explanation for the modest effect of traditional university teaching might be the passive way of studying: Students are present in the lectures and small groups, and they work on given tasks, but they are not initiatively trying to understand mathematical rules, relations, principles and new perspectives. It seems that the traditional teaching method (lectures, small groups, examination), at least in the case of calculation skills, is wasting resources of students and teacher educators. From the results of the activating teaching, one can reason that writing accounts will commit students to ponder the principles of calculation algorithms. At the same time, students' mathematical thinking and calculation skills will develop.

In summary one can state that an activating teaching method seems to have many advantages. The pondering of principles and the writing on them will produce more effectively calculation skills than the traditional teaching with examinations. Division as a complex basic calculation needs for routine learning much memory capacity. Perhaps, therefore, a conceptual generalization and structural thinking (cf. Sfard 1994; Gray & Tall 1993) have an opportunity to show their power compared to routine learning, especially in division. Through developing elementary teacher students' mathematical thinking, one can indirectly influence the quality of mathematics teaching in the comprehensive school. Such a teaching method, based on pondering, can be applied already in the elementary school, and thus promote pupils' mathematical thinking and calculation skills, as Ji-Eun (2007) has done.

References

- Campbell, S. (1996). On preservice teachers' understandings of division with remainder. In: L. Puig & A. Guitierrez (Eds.), *Proceedings of the PME 20* (Vol. 2, pp. 177–184). Valencia: Universitat de Valencia.
- Gray, E. & Tall, D. (1993). Success and Failure in Mathematics: The Flexible Meaning in Symbols as Process and Concepts. *Mathematics Teaching*, 142, 6–10.
- Hiebert, J. & Carpenter, T.P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. In: D.A. Grows (Ed.), *Handbook research on mathematics learning and teaching* (pp. 65–79). New York: MacMillan.
- Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowldge in mathematics: An introductory analysis. In: J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case on mathematics* (pp. 1–127). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Ji-Eun, L. (2007). Making sense of the long division algorithm. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, 48–59.
- Kaasila, R., Hannula, M.S., Laine, A. & Pehkonen, E. (2008). Evaluating admission procedures for teacher education in Finland. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 6 (1), 231–243.
- Kaasila, R., Pehkonen, E. & Hellinen, A. (2010). Finnish pre-servise teachers' and upper secondary students' understanding of division and reasoning strategies used. *Educational Studies in Mathematics*, 73 (3), 247-261.
- Kilpatrick, J. (2009). Conceptual understanding as a strand of the mathematical proficiency. In: J. Novotná & H. Moraová (Eds.), *The development of mathematical understanding, Proceedings of International Symposium Elementary Maths Teaching 23–28.8.2009* (pp. 42–53). Praha: Charles University.
- Leinonen, J. (2011). Understanding and Mathematical Problem Solving. In: K. Szücs & B. Zimmermann (Eds.), *Proceedings of the ProMath meeting in Jena 2010*. University of Jena.
- Leinonen, J. & Pehkonen, E. (2009). Teaching for understanding in division: A case of elementary teacher students. In: J. Novotná & H. Moraová (Eds.), *The development of mathematical understanding, Proceedings of International Symposium Elementary Maths Teaching* (pp. 155–162). Praha: Charles University.
- NBE (2004). *Framework Curriculum for the Comprehensive School 2004*. National Board of Education: Helsinki.
- Merenluoto, K. & Pehkonen, E. (2002). Elementary teacher students' mathematical understanding explained via conceptual change. In: D. Mewborne, P. Sztajn, D.Y. White, H.G. Wiegel, R.L. Bryant & K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the PMENA XXIV* (pp. 1936–1939). Columbus (OH): ERIC.
- Pehkonen, E. & Kaasila, R. (2009). Understanding and reasoning in a non-standard division task. In: M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the PME-33* (Vol. 4, pp. 345–352). Thessaloniki: Aristotle University.
- Pirie, S. & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26, 165–190.
- Sfard, A. (1994). Reification as the Birth of Metaphor. *For the Learning of Mathematics* 14, 44–55.
- Simon, M.A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 233–254.
- Skemp, R.R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, 77, 20–26.
- Tirosh, D. & Graeber, A. (1990). Evoking Cognitive Conflict to Explore Preservice Teachers' Thinking About Division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 98–108.