

Algebrallisen ajattelun tukeminen ensimmäisen luokan matematiikan oppikirjoissa

Suvi Jarva
Pro Gradu -tutkielma
Kasvatustieteen tiedekunta
Luokanopettajan koulutusohjelma
Lapin yliopisto
Syksy 2022

Lapin yliopisto, kasvatustieteiden tiedekunta

Työn nimi: Algebrallisen ajattelun tukeminen ensimmäisen luokan matematiikan oppikirjoissa

Tekijä: Suvi Jarva

Koulutusohjelma/oppiaine: Kasvatustiede / Luokanopettajan koulutusohjelma

Työn laji: Pro gradu -tutkielma

Aika: syksy 2022

Ulkoasu: 54 sivua

Pro gradu -tutkielmani keskiössä on kaksi ensimmäisen luokan matematiikan kirjaa. Tämän tutkimuksen tarkoituksena on tarkastella erilaisten yhteen- ja vähennyslaskutehtävätyyppien sekä hajotelmatehtävien määrää ja sijaintia algebrallisen ajattelun näkökulmasta sekä vertailla kirjoja. Tutkimuksen teoreettisessa viitekehyksessä tarkastellaan algebrallisen ajattelun luonnetta, oppikirjan merkitystä matematiikan opetuksessa sekä tällä hetkellä voimassa olevaa Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteita (2014).

Tutkimus on toteutettu kvantitatiivisella tutkimusotteella. Tutkimukseen valitut oppikirjojen tehtävät on ensin luokiteltu sisällönanalyttisesti viiteen ryhmään ja jokaiselle tehtävälle on annettu muuttujat tehtävätyypin, oppikirjan kappaleen sisäisen sijainnin sekä kappalenumeron mukaan. Saatuja tuloksia on analysoitu taulukkolaskentaohjelmalla. Tutkimusaineistona toimi kaksi fyysistä matematiikan ensimmäisen luokan oppikirjaa. Tuloksista ilmenee, että algebrallisen ajattelun kehittyminen on kirjoissa pyritty ottamaan huomioon, jossain määrin painottuen kuitenkin kirjan soveltaviin tehtäviin. Tutkimus antaa näkökulmia siihen, miten algebrallisen ajattelun kehittymistä voidaan edistää matematiikan opetuksessa.

Asiasanat: matematiikka, matematiikan oppikirja, algebrallinen ajattelu, matematiikan opetus

Sisällysluettelo

1 JOHDANTO.....	4
2 ALGEBRALLISEN AJATTELUN TUKEMINEN ALKUOPETUKSESSA.....	7
2.1. Algebrallinen ajattelu.....	7
2.2 Varhainen algebrallinen ajattelu.....	8
2.3 Mitkä tekijät ohjaavat varhaisen algebrallisen ajattelun kehittymistä?.....	11
2.4 Oppikirja matematiikan opetuksessa.....	14
2.5 Matematiikka Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2014.....	18
3 TUTKIMUKSEN TARKOITUS JA TUTKIMUSKYSYMYKSET.....	22
4 TUTKIMUKSEN EMPIIRINEN TOTEUTUS.....	24
4.1 Tutkimusote.....	24
4.2 Tutkimusaineisto ja sen hankinta.....	24
4.3 Aineiston analyysi.....	26
5 TUTKIMUSTULOKSET.....	29
6 POHDINTA.....	46
6.1 Tulosten yhteenveto.....	46
6.2 Tulosten tarkastelua.....	47
6.3 Johtopäätökset ja jatkotutkimuskohteet.....	50
Lähteet.....	52

1 JOHDANTO

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet on opetushallituksen antama määräys. Se on siis opetuksen järjestäjää velvoittava asiakirja, jonka perusteella paikalliset, kunta- ja koulukohtaiset opetussuunnitelmat laaditaan. Erityisesti matematiikkaa oppiaineena leimaa oppikirjakeskeisyys sisältökeskeisyyden sijaan (Lepik, Greveholm & Viholainen, 2015). Opettaja saattaa siis olla uskollisempi oppikirjalle kuin opetussuunnitelmalle. Toisaalta tämä on ymmärrettävää, koska arkitodellisuus koululuokassa on monin tavoin haastava ja vaatii paljon opettajan resursseja. Perusopetuslain (1998/628) kuudennessa pykälässä säädetään, että oppilaan koulumatkan tulee olla mahdollisimman lyhyt ja turvallinen ja kunnan on osoitettava oppivelvolliselle paikka ensisijaisesti lähikoulusta. Saman lain pykälissä 16, 16a ja 17 säädetään, että oppilaan on saatava tarvitsemansa tuki opintojen edistymiseksi. Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että tuki tulee järjestää lähikoulussa, yleisopetuksen ryhmässä erilaisilla järjestelyillä. Tästä syystä ei ole realistista olettaa, eikä edes tarkoituksenmukaista, että luokanopettaja pystyisi itse tekemään kaikki matemaatiikan opetuksessa tarvittavat materiaalit.

Toisaalta valmiit oppikirjasarjat myös tasa-arvoistavat oppilaita. Opetettavan asian sisältö ei ole riippuvainen yksin opettajan opetussuunnitelman tulkinnasta, osaamisesta, mielenkiinnon kohteista ja painotuksista. Oppikirjatutkimusta ei Suomessa tehdä systemaattisesti, vaikka erilaisissa selvityksissä on todettu, että erityisesti matematiikassa käytetyllä oppikirjalla on suuri vaikutus osaamiseen (Tossavainen, 2019). Matematiikan oppikirjoista on olemassa pieniä, lähinnä pro gradu -tutkimuksia. Näistä esimerkkinä Joutsenlahden ja Vainionpään ohjaama Matematiikan Oppimateriaalien Tutkimuksen projekti, jossa oli osallisena

kahdeksan pro gardu -tutkielmaa (Joutsenlahti & Vainionpää, 2007). Tässä projektissa näkökulmana oli aritmetiikan ja geometrian tehtävät.

Tarkastelen tässä tutkimuksessa kahden eri ensimmäisen luokan matematiikan kirjan viittä eri tehtävätyyppiä nimenomaan algebrallisen ajattelun kehittymisen näkökulmasta. Suurimman matematiikan opettajien järjestön, the National Council of Teachers of Mathematics presidentti (vuosina 2004-2006) Cathy L. Seeley kirjoitti NCTM News Bulletin syyskuun 2004 julkaisussa omassa puheenvuorossaan seuraavasti:

“Algebraic thinking includes recognizing and analyzing patterns, studying and representing relationships, making generalizations, and analyzing how things change.”

Sen lisäksi, että algebrallisen ajattelun taidot ovat osa matematiikkaa, ne ovat osa arjen toimintoja. Yleistäminen sekä asioiden välisten suhteiden ja niiden muutosten analysoiminen ja tunnistaminen helpottavat monia arkisia askareita. Mitä reittiä pitkin pääsen nopeimmin töihin? Vaikuttaako esimerkiksi kellonaika asiaan? Voiko tämän tehtävän tehdä jotenkin helpommin? Ulkoilman lämpötila on tänään sama kuin eilen, mutta siellä tuulee kovaa, mikä on paras vaatetus juoksulenkille?

Toimin nyt neljättä vuotta alakoulun luokanopettajan sijaisena. Työssä olen käytännössä huomannut, että heterogeenisessä opetusryhmässä algebrallisen ajattelun taitojen opettaminen ja oppiminen on arkisissakin tilanteissa haastavaa, puhumattakaan abstraktista matematiikasta. Halusin tutkia nimenomaan ensimmäisen luokan matematiikan oppikirjoja, koska kyseisen aineen oppikirjauskollisuuden vuoksi juuri matematiikan oppikirjoilla on laaja tavoitavuus ja vaikuttavuus koko ikäluokassa. Tästä nousi tutkimuskysymykseni: minkälaisia algebrallista ajattelua kehittäviä tehtäviä on ensimmäisen luokan matematiikan

kirjoissa. Oman kokemukseni mukaan alkuopetusikäisillä lapsilla myös kiinnostus ja vastaanottavuus matematiikkaa kohtaan on suurempaa kuin vanhemmilla oppilailla.

2 ALGEBRALLISEN AJATTELUN TUKEMINEN ALKUOPETUKSESSA

2.1. Algebrallinen ajattelu

Aritmetiikassa eli numeerisessa laskemisessa lähdetään tunnetuista kohti tuntematonta. Esimerkiksi kuinka paljon 2 ja 3 ovat yhteensä. Algebrallisen ajattelun avulla pystytään ratkaisemaan huomattavasti monimutkaisempia ongelmia, koska se lähtee liikkeelle tuntemattoman tunnistamisesta ja sen jälkeen sillä operoimisesta, kuin se olisi tunnettu. (Mason, 2008.) Usein kuulee sanottavan, että miksi pitää osata laskea, onhan laskin keksitty. Tavallinen laskin suorittaa kyllä aritmeettisen tason operaatiot, mutta laskimen käyttäjän pitää suorittaa algebrallinen ajattelu sen suhteen, mikä tehtävä laskimelle annetaan.

Algebra on yleistyksien ja säännömukaisuuksien systemaattista esittämistä symboleilla. Algebraa voi lähestyä kolmen perusajatuksen kautta: algebra on yleistetyn aritmetiikan tutkimista, algebra on funktioiden ja suhteiden variaatoiden tutkimista ja algebra on sovellus mallinnuskielen klusterista sekä matematiikan sisällä että sen ulkopuolella. (Kaput, 2008.)

Myös arkipäiväisiä ongelmia voi lähestyä algebrallisen ajattelun kautta. Lettutaikinan ohjeessa sanotaan, että siihen tarvitaan 4dl maitoa, 1 kananmuna, 2 dl vehnä jauhoja, 0,5 dl öljyä ja 0,5 tl suolaa. Jääkaapista löytyy 1 litra maitoa ja 2 kananmunaa. Kuinka suuren lettutaikinan aineksista voi tehdä? Ensimmäisenä täytyy tarkastella maidon ja kananmunien suhdetta. Yhtä kananmunaa vastaa 4 dl maitoa eli kahta kananmunaa vastaa siis 8 dl maitoa. Koska jääkaapissa on 1 litra

eli 10 dl maitoa, on mahdollista tehdä kahden kananmunan taikina. Tulevaisuutta varten tämä ohje voidaan yleistää niin, että kananmunien määrä kerrotaan neljällä ja saadaan tarvittava maidon määrä desilitroina.

Algebrallisella ajattelulla tarkoitetaan kykyä rakentaa, arvioida ja esittää oletuksia matematiikan rakenteista ja suhteista. Se on myös tapa tarkastella käsillä olevaa ongelmaa matemaattisesti ja se ei edellytä esimerkiksi kirjainmuuttujan käyttöä, vaan myös muita merkkejä voidaan käyttää osoittamaan muuttujaa. (Kieran, Pang, Schiffer & Ng, 2016.) Lettutaikinaesimerkissä kananmunien määrää voitaisiin kuvata esimerkiksi kananmunan kuvalla ja maidon määrää maitokannulla. Toisaalta voitaisiin sopia, että kananmunien lukumäärää vastaa muuttuja x ja maidon määrää desilitroina muuttuja y .

2.2 Varhainen algebrallinen ajattelu

Yleensä laskemisen opettelu alkuvaiheessa siihen liitetään vahvasti konkreettiset laskettavat, joko esineinä, piirroksina tai mielikuvina. Vähitellen konkretiasta siirrytään kohti abstraktia, eli operoidaan pelkillä luvuilla. (Mason, 2008.)

Kahden palikan lukumäärää kuvataan numerolla 2. Harjoitellaan piirtämään numeroa 2. Opetellaan mahdollisesti että kun yhdistetään yksi ja yksi palikka, saadaan kahden palikan torni. Tätä opetaariota kuvataan matematiikan kielessä lausekkeella $1+1=2$. Näin jatketaan ensin lukuun 10 ja laajennetaan edelleen lukualueelle 0-20, sitten lukualueelle 0-100. Pienempien lukujen kohdalla oikean ratkaisun muistaminen ulkoa on kohtuullisen helppoa, mutta jo kymmenet ylittävissä yhteen- ja vähennyslaskuissa se muuttuu vaikeaksi.

Erilaisten strategioiden opettaminen pelkän ulkoaoppimisen sijaan parantaa oppilaiden matemaattista suoriutumista. Kun numeeristen laskutoimitusten ja operaatioiden suorittaminen automatisoituu, vaikeammalle matemaattiselle ajattelulle, kuten yleistyksille, vapautuu kapasiteettia. (Kieran, ym. 2016). Kymmenien ylityksessä oppilas hyötyy huomattavasti erilaisista laskustrategioista sen sijaan, että jokainen vastaus pitäisi muistaa ulkoa. Tämän jälkeen hän kykenee tarkastelemaan käsillä olevaa ongelmaa laajemmin, etsimään siitä yhteyksiä ja mahdollisia yleisiä säännönmukaisuuksia.

Lapset luokittelevat ja lajittelevat asioita osana arkisia toimia. Punaiset palikat tuohon pinoon, leluautot suuruusjärjestykseen, kumisaappaat eteisessä pareittain. Pyrkimys luoda järjestystä ja jäsentää erilaisia esineitä, asioita ja tapahtumia näkyy lapsissa varhain. Lapset myös tekevät luonnostaan yleistyksiä yksittäisten tapausten perusteella. Olennaista onkin, kuinka tätä taipumusta voidaan käyttää oppimisen välineenä. (Mason, 2008.) Piaget'n teorian mukaan oppiminen tapahtuu joko sulauttamalla uusi asia olemassa olevaan skeemaan tai jos sopivaa kohdetta ei löydy, se hylätään tai skeemaa ryhdytään muuttamaan. Kun lapsi kohtaa punaisten palikoiden joukossa yhden sinisen palikan, hän joko muodostaa siniselle palikalle kokonaan uuden luokan tai muokkaa punaisten palikoiden lajittelua niin, että sininen palikka mahtuu johonkin niistä. Samalla tavalla matematiikassa lapset luokittelevat uuden tiedon tai ominaisuuden ja joko sisällyttävät sen aiemmin oppimaansa tai alkavat muodostaa kokonaan uutta kategoriaa.

Matemaattiset perusominaisuudet, kuten yhteen- ja vähennyslaskujen sekä kerto- ja jakolaskujen periaatteet ovat perusta sekä aritmetiikalle että algebralle (Blanton, ym. 2011). Niiden osaaminen luo matemaattisen perustuksen, joiden sisällä ja välillä matematiikassa operoidaan. Kun ongelmaa lähdetään ratkaisemaan, usein ensimmäisessä vaiheessa käytetään intuitiivisesti tiettyjä laskutoimitusten ominaisuuksia ja vasta tälle pohjalle aletaan rakentamaan yleistystä kyseisestä

ominaisuudsta (Blanton, ym. 2011). Esimerkiksi jos kolmessa korissa on jokaisessa kaksi omenaa, ensimmäinen vaihe voisi olla omenoiden visualisoiminen koreihin. Siitä mahdollisesti muodostuu yhteenlasku $2+2+2$, jota tarkasteltaessa huomataan, että laskussa on kolmesti sama yhteenlaskettava eli laskun voisi ilmaista myös kertolaskuna 3×2 . Tästä on edelleen mahdollista tehdä yleistys, jossa todetaan, että yhteenlaskun, jossa on koko ajan sama yhteenlaskettava, voi ilmoittaa kertolaskuna. Edelleen päättelyä voi jatkaa niin, että kertolaskun toisena lukuna (kertojana) on yhteenlaskettavien määrä ja toisena lukuna (kerrottavana) kyseinen yhteenlaskettava.

Varhainen algebra poikkeaa varsinaisesta, muodollisesta algebrasta kolmella tavalla. Ensinnäkin varhainen algebra rakentuu ratkaistavan ongelman taustatarinan varaan. Suurin alakouluikäisten lasten matemaattisesta ongelmanratkaisusta tapahtuu intuition, uskomusten, esitettyjen tosiasioiden ja päättelyn avulla, puhtaan logiikan ja matematiikan sääntöjen sijaan. Tästä johtuen toinen näkulma on esitellä muodolliset merkintätavat asteittain. Kolmanneksi varhainen algebra vuorovaikuttaa tiiviisti varhaisen matematiikan opetuksen kanssa. Algebra on läsnä esimerkiksi sanallisissa tehtävissä, opiskeltavissa aiheissa, kuten yhteen- ja vähennyslaskuissa ja matematiikkaa kuvaavissa järjestelmissä, kuten lukusuoralla, taulukoissa ja selittävässä kuvissa. (Carragher, Schliemann & Schwartz, 2008.)

On osoitettu, että varhainen algebrallista ajattelua tukeva oppiminen korreloi myöhemmän algebran osaamisen kanssa. Jos yleistämisen ajatus on tuttu, myös kirjainmuuttujien käyttö myöhemmin on helpompaa. (Kieran, ym. 2016.) Varhainen algebrallinen ajattelu pitää sisällään sen ajatuksen, että yleistysten tekemisen lisäksi ajattelua pyritään laajentamaan siten, että yleistyksiä voidaan käsitellä samalla tavalla kuin yksittäisiä objekteja. (Blanton, ym. 2011) Carragherin ym. (2008) tutkimuksessa keskityttiin siihen, kuinka oppilaiden ajattelu kääntyi tarkoista

numeroista ja mitoista numerjoukkojen välisiin suhteisiin sekä numeerisen vastauksen tuottamisesta eri muuttujien välisten suhteiden kuvaamiseen. Eräs huomio tutkimuksessa olikin, että nuoret oppilaat osoittivat taipumusta käyttää algebrallista ajattelua vain, kun heitä rohkaistiin tekemään matemattisia yleistyksiä. Mielenkiintoinen kysymys on, kuinka suomalainen alkuopetus ohjaa oppilaiden ajattelua tähän suuntaan.

2.3 Mitkä tekijät ohjaavat varhaisen algebrallisen ajattelun kehittymistä?

Kuten on aiemmin todettu, yksi algebran perusajatuksista on, että se on yleistetyn aritmetiikan tutkimista. Kun harjoitellaan matemaattisten perustoimintojen ominaisuuksia ja yleistetään niitä, on perusteltua käyttää numeerisia laskuja luomaan asiayhteys opiskeltavan asian ja lapsen konkreettisen ajattelun välille (Blanton, ym. 2011). Erityisesti nuorilla oppilailta aritmetiikan yleistäminen on saanut laajan merkityksen, kun aritmeettisten ongelmien suhteita ja ominaisuuksia voidaan yleistää ilman kirjainmuuttujan välttämättömyyttä (Kieran, ym. 2016).

Numeerinen päättely onkin tärkeässä osassa algebrallisen ajattelun kehittymisessä. Sen avulla lapset saavat konkreettisiä yhteyksiä, joissa he voivat tutkia mitattujen kohteiden suhteita ja yhteyksiä. Tavalliset aritmeettiset tehtävät voidaan laajentaa algebralliseksi etsimällä tehtävistä yleistyksiä ja kaikissa vastaavissa tapauksissa päteviä sääntöjä. (Blanton, ym. 2011.) Esimerkiksi luvun 10 hajotelmia, "kymppipareja" (1 ja 9, 2 ja 8, 3 ja 7, 4 ja 6 sekä 5 ja 5), tutkimalla voidaan huomata että jos kokonaisluvuilla laskettaessa ensimmäinen yhteenlaskettava kasvaa yhdellä ja toinen yhteenlaskettava vähenee yhdellä, lopputulos pysyy samana.

Algebrallisen ajattelun kehittymiselle on tärkeää opettaa jo alkuopetusikäisille matemaattista päättelyä ja syysseuraussuhteita numeeristen laskujen yhteydessä. Pelkkä mekaaninen numeroilla laskeminen ja sääntöjen ulkoaopettelu ei rohkaise oppilaita pohtimaan asioiden suhteita ja näin ollen algebrallinen ajattelukaan ei pääse kehittymään. (Blanton, ym. 2011). Algebrassa kuitenkin on kyse nimenomaan yleistämisestä, säännönmukaisuuksista ja suhteista, ei pelkästään numeerisista laskutoimituksista. Kun tunnustetaan ja nimetään se, mitä ei tiedetä, voidaan sitä käsitellä kuin tunnettua (Mason, 2008).

Jo alkuopetuksessa päättelytehtävät ovat tärkeitä, koska niiden harjoittelu ensininkin korreloi algebrallisten taitojen kehittymisen kanssa ja toisaalta koska ne lisäävät matemaattisen ajattelun merkityksellisyyttä (Smith & Thompson, 2008). Päättelytehtävät myös kehittävät samankaltaisia matemaattisia ajatusmalleja kuin algebralliset ongelmat ja valmistavat näin siirtymään kohti algebralle tyypillisiä yleistäviä, symbolein esitettyjä tehtäviä. Päättelytehtävät auttavat lapsia ymmärtämään algebrallisia ongelmien esitys- ja ratkaisutapoja. (Smith & Thompson, 2008.) Algebrallisessa ongelmanratkaisussa keskiössä ovat laskutoimitukset ja niiden päättely aritmeettisen vastauksen saamisen sijaan (Blanton, ym. 2011).

Algebrallisen ajattelun kehittymiselle on olennaista monipuoliset ongelmanratkaisutehtävät (Blanton, ym. 2011). Ne voivat olla aritmeettisiä, sinänsä yksinkertaisia tehtäviä, jotka kuitenkin haastavat oppilaan ajattelemaan ja päättämään ratkaisun ulkoa muistamisen sijaan. Aiemminkin mainitun kaltaiset, usein luokkahuoneessa kuullut kommentit kuten "mihin tätä tarvitaan" tai "miksi tätä pitää opetella, kun on laskin" kertovat turhautumisesta. Pelkkien aritmeettisten laskutoimitusten toistamista ei nähdä mielekkäänä. Algebralliset ulottuvuudet syventävät matematiikan opetusta ja luovat näille ajattelun taidoille merkityksen.

Algebrallisten ongelmien ratkaisu antaa oppilaalle suuremman osaamisen kokemuksen kuin aritmeettinen laskukoneena toimiminen.

Matemaattisen kielen sisällä algebraan on vakiintunut tapa käyttää symbolisia merkintöjä, erityisesti muuttujille. Tämän kielen osaaminen on olennaista algebrallisen ajattelun kehittämisessä ja algebran osaamisessa. Jo alkuopetusikäisille voidaan esitellä symbolisen muuttujan käyttöä tavallisten, aritmeettisten tehtävien yhteydessä. (Blanton, ym. 2011., Kieran, ym. 2016). Oppikirjoissa tämä näkyy usein tyhjänä laatikkona tai viivana sen sijaan, että tuntemattoman tilalla olisi joku symboli. Kuten Mason (2008) huomauttaa, oppilaille nämä näyttävät usein pelkästään omituisina aritmeettisina tehtävinä, eivätkä ne sinänsä ohjaa kohti algebrallista ajattelua ja tuntemattoman käsitettä. Näiden tehtävien kohdalla onkin syytä pohtia, miten tuntematon voidaan kirjan tehtävissä esitellä alkuopetusikäisille lapsille siten, että se tukisi myöhemmin algebralle tyypillisen kirjainmuuttujan käyttöä.

Varhaisen algebran harjoittelu tarjoaa lapselle käsitteellisen perustan, jonka avulla hän pystyy yleistämään, käsittelemään ja ymmärtämään matemaattisia suhteita ja matematiikan lainalaisuuksia ilman, että osaaminen on riippuvainen lapsen muistista (Blanton, ym. 2011.) Olennaista tämän taidon kehittymiselle on, että lapsella on mahdollisuus ilmaista matemaattista päättelyä sekä muodollisesti että omina tuotoksina. On huomattu, että lapsilla matemaattisen mallin yleistäminen ei ole suoraviivainen prosessi, vaan se on joustava, muuttuva ja siinä on useita ulottovuuksia, joihin vaikuttavat esimerkiksi kulttuuriset tekijät (Kieran, ym. 2016).

Yksi tärkeä tekijä varhaisen algebrallisen ajattelun kehittämisessä on oppilaiden itsensä ongelmasta tekemät esitykset, kuten kuvat, taulukot ja puhuttu ongelmanratkaisu ennen sovittua, muodollista matemaattista tapaa esittää ongelma. Tämän jälkeen tuotettu tieto muokataan niin, että on mahdollista nähdä,

löytyykö siitä yleinen malli tai yleistettävä sääntö. (Carraher ym., 2008.) Urheilija kehittyy harjoittelemalla, samoin pianisti kehittää taitojaan soittamalla. Jos lapsille ei anneta tilaa ja mahdollisuutta tutkia ja esittää ajatuksiaan, ikään kuin käänällä ja katsella matemaattista ajatusta eri puolilta, jää syvempi ymmärrys matematiikasta syntymättä. Tämä johtaa ajattelun pintapuolisuuteen ja yksiulotteisuuteen, jossa matematiikka näyttäytyy arkielämästä irrallisena sarjana muistettavia laskukonetoimintoja.

On todettu, että myös alkuopetusikäiset lapset kykenevät yleistämään riippuvuussuhteita ja määrittelemään uuden muuttujan muiden tunnettujen muuttujien kautta (Kieran, ym. 2016).

Minna on kaksi vuotta vanhempi kuin Pekka. Pekka puolestaan on kolme vuotta nuorempi kuin Kalle.

Jo nuoret lapset osaavat muodostaa seuraavat suhteet: Minnan iän Pekan ja Kallen iästä, Kallen iän Minnan ja Pekan iästä ja Pekan iän Kallen ja Minnan iästä. Jos kenkään iälle ei anneta numeroarvoa, pystytään silti päättelemään Minnan ja Kallen ikäero. Näiden päätelmien syntyminen kuitenkin vaatii sen, että alkuopetusikäisillä lapsilla on mahdollisuus jollakin tavalla käsitellä tietoja ja ajatuksia ja tuottaa niitä näkyvään muotoon ennen varsinaisen yleistyksen tekemistä.

2.4 Oppikirja matematiikan opetuksessa

Matematiikka, samoin kuin kieli, on abstraktia, kunnes se sidotaan johonkin konkreettiseen. Termi yksi on matemaattinen käsite, joka saa merkityksen vasta kun se kuvaa jonkun suuruutta tai lukumäärää. Myös yhden suuruus on suhteellinen. Jos ihmisellä on yksi aste kuumetta, hän on jo melko sairas. Jos

rappusia on yksi enemmän, muutos ei ole iso. Yksi lottovoitto voi olla muutama kymmenen senttiä tai muutaman miljoonan.

Kaikki kohtaamiset matematiikan kanssa ovat välitteisiä ja erilaisilla välittäjillä on iso rooli matematiikan opetuksessa. Yksittäisissä käytännön tehtävissä näitä välittäjiä ovat esimerkiksi viivain, satataulu, harppi, ajattelun tasolla matematiikan oppikirja, digitaaliset välineet, tehtävät ja ongelmat tai puhuttu kieli. Matematiikan opettaminen ja oppiminen riippuu suuresti abstraktien matemaattisten rakenteiden konkreettisista esityksistä sekä niitä tukevista välineistä. (Rezart & Strässer, 2012.)

Vygotskyn kulttuurihistoriallisessa psykologiassa käytetään psykologisen työkalun käsitettä. Koska matematiikan opetuksessa ei sinänsä ole tarkoitus muuttaa itse matematiikkaa vaan nimenomaan oppijan matemaattisia tietoja, kaikki siinä käytetyt välineet voidaan laskea psykologiseksi työkaluiksi. Nämä työkalut muuttavat ajattelun rakenteita ja ovat rakentamassa uutta kokonaisuutta, käyttäytymisen perusyksikköä. (Rezart & Stässer, 2012.) Oppilaiden käsitykset ja kokemukset matematiikasta syntyvät sen mukaan hajottavatko vai vahvistavatko opetuksen tarjoamat psykologiset työkalut matemaattisen ajattelun rakenteita kohti loogista kokonaisuutta.

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2014 matematiikan opetuksesta sanotaan ”Matematiikan opetuksen tehtävänä on kehittää oppilaiden loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua. Opetus luo pohjan matemaattisten käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämiselle sekä kehittää oppilaiden kykyä käsitellä tietoa ja ratkaista ongelmia.” Kuten Rezert ja Strässer (2012) toteavat artikkelissaan *From the didactical triangle to the social-didactical tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation*, matematiikan

oppikirja on yksi väline, joka on läsnä matematiikan opetuksessa ja oppimisessa näiden käsitteiden ja rakenteiden ymmärtämistä tukevana välineenä.

Oppikirjat ovat tärkeitä sekä opettajille että oppilaille. Opettajat suunnittelevat tunteja oppikirjojen perusteella ja oppilaat työskentelevät niiden kanssa. Hyvin usein matematiikan oppitunti rakentuu oppikirjan tehtävien ympärille ja tästä johtuen ne ovat yksi tärkeimmistä opetuksen käytäntöjä määrittävistä tekijöistä. On esitetty, että matematiikalle tämä riippuvuus oppikirjasta on tyypillisempää kuin millekään muulle oppiaineelle. (Lepik, Greveholm&Viholainen, 2015.)

Lepikin ym. (2015) tutkimuksen tuloksista voidaan lukea, että suomalaisista opettajista 64% piti oppikirjaa ensisijaisena työkaluna tuntien suunnittelussa, 53% sanoi oppikirjan vaikuttavan pedagogisiin ratkaisuihin tunnilla ja 90% käytti ainoastaan oppikirjan tehtäviä oppitunnilla sekä 76 % kotitehtävinä. Silti vain vähän alle puolet (46%) piti kirjojen tehtäviä sopivina sekä heikoille että vahvoille oppilaille. Oppikirja onkin usein ainut materiaali, jota kaikki oppilaat käyttävät matematiikan oppitunnilla (Lepik ym., 2015). Mielenkiintoiselta vaikuttaakin tulos, jonka mukaan joka toinen opettaja piti oppikirjaa sopimattomana kaikille luokan oppilaille, mutta silti lähes kaikki opettajat käyttivät vain näitä tehtäviä oppitunneilla. Oppijalle sopimattomat tehtävät toimivat hajottavina eivätkä rakentavina psykologisina työkaluina matemaattisen ajattelun osa-alueiden kehittämisessä.

Erilaiset välineet vaikuttavat oppilaiden matematiikan oppimiseen perustavalla tavalla. Niiden avulla oppilas saa mahdollisuuden ratkaista matemaattisia ongelmia kokonaisvaltaisesti. Syvemmällä tasolla vuorovaikutus välineiden kanssa vaikuttaa myös oppilaan käyttäytymiseen. (Rezart & Strässer, 2012). Rezartin ja Strässerin (2012) esittelemän tutkimukset mukaan osa oppilaista ei edes yrittänyt löytää itsenäisesti sääntöä esitettyyn matemaattiseen ongelmaan, kun valmiin toimintamallin pystyi katsomaan suoraan kirjasta. Yksi oppilas haastoi opettajan ja

muun ryhmän luoman laskusäännön, ”koska kirjassa sanotaan” -perustelulla. Tässä valossa onkin tärkeää, että matematiikan opetuksessa käytetyt oppikirjat ja niiden tehtävät nimenomaan kehittävät matemaattisen ajattelun rakenteita, eivätkä pelkästään tarjoa sääntöjä ja malleja tehtävien ratkaisemiseen.

Kouluopetukselle on tyypillistä, että oppilaat eivät itse valitse käytettyjä välineitä, vaan ne ovat opettajan välittämiä. Tutkimuksissa on todettu, että opettaja tapa käyttää näitä välineitä vaikuttavat merkittävästi myös opetustilanteeseen. (Rezart&Strässer, 2012.) Samoin on todettu, että nimenomaan matematiikassa oppikirjoilla on suuri vaikutus opetettuihin sisältöihin ja vain harvoin opettaja sisällyttää opetukseen teemoja oppikirjan ulkopuolelta. Oppikirjat ohjaavatkin opettajien pedagogisia valintoja. (Leipik ym. 2015.) Monessa tapauksessa oppilaan saama matematiikan opetus riippuukin siis käytössä olevasta oppikirjasta.

Lepikin ym. (2015) tutkimus osoittaa, että 45% opettajista käyttää oppikirjaa lähinnä tehtäväkirjana. Jos matematiikan osaaminen nähdään yksinkertaisesti ”laskukonetoimintana” ja se sisältää vain vähän käsitteellistä ajattelua, niin ehkä harjoittelu annettujen esimerkkien perusteella on tarpeeksi. Tutkijat esittävät, että esimerkiksi Norjassa opettajat puhuvat liian vähän oppilaiden kanssa matematiikan tunneilla ja oppilaat viettävät liian pitkiä aikoja hiljaisessa ja itsenäisessä laskemistyössä. Tämä johtaa siihen, että yksi työskentelytapa on ylliedustettuna. (Lepik, ym. 2015.)

Samaan tulokseen on tullut myös Perkkilä (2002) väitöskirjassaan Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa. Hän toteaa matematiikan oppikirjoilla ja opettajan oppailla olevan keskeinen merkitys opetuksen toteutuksessa ja käytännössä ne toimivatkin toteutuvana opetussuunnitelmana. Tutkimuksen mukaan opettaja odottaa oppilaiden täyttävän

oppikirjaa, kuten kirjan tekijät ovat tarkoittaneet ja oppilaiden omille ajatuksille ja ratkaisumalleille ei oppitunneilla jää tilaa.

Usein matematiikan opetus on myös oppikirja- eikä sisältökeskeistä. Koko oppikirjan käyminen läpi nousee tärkeämmäksi kuin matemaattisten käsitteiden ymmärtäminen ja osaaminen. (Perkkilä, 2002.) Syntyy mielenkiintoinen ristiriita opetussuunnitelman tavoitteiden, reaalisen matemaattisen ajattelun kehittymisen matemaattisten käsitteiden ja suhteiden avulla ja oppitunneilla käytettävien välineiden ja materiaalien kesken.

Oppikirjojen kehittämiseen käytetään jatkuvasti resursseja. Perustava kysymys onkin, näkevätkö oppikirjojen kehittäjät matemaattisen osaamisen laajana ajattelun taitojen kokonaisuutena, josta on hyötyä kaikilla elämän osa-alueilla vai nähdäänkö matematiikka lähinnä ostoksilla tarvittavana taitona laskea, paljonko rahaa saa takaisin.

2.5 Matematiikka Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2014

Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2014 oppija nähdään kokonaisvaltaisesti aktiivisena toimijana. Hän kehittyi ongelmanratkaisijana ja oppii asettamaan tavoitteita sekä yksin että ryhmässä. Myös oppilaan oma tapa oppia, prosessoida oppimaansa ja sitä kautta rakentaa identiteettiään ja maailmankuvaansa on keskeisessä osassa POPS:n oppimiskäsitystä. POPS:issa painotetaan monipuolisia työskentelytapoja ja erilaisten toimintatapojen ja ajatteluntaitojen kehittymistä. Oppilasta ei nähdä tehtäväkirjan täyttäjänä ja tiedon vastaanottajana vaan osana oppimiskokonaisuutta ja sen tuottamista.

POPS:ssa on määritelty sekä laaja-alaiset osaamisen tavoitteet että matematiikan ainekohtaisen osaamisen tavoitteet vuosiluokilla 1-2. Laaja-alaisia osaamisen alueita ovat ajattelu- ja oppimaanoppiminen, kulttuurinen osaaminen, vuorovaikutus ja ilmaisu, itsestä huolehtiminen ja arjen taidot, monilukutaito, tieto- ja viestintäteknologinen osaaminen, työelämätaidot ja yrittäjyys, osallistuminen, vaikuttaminen ja kestävän tulevaisuuden rakentaminen.

Laaja-alaisista osaamisen tavoitteista ajattelun ja oppimaan oppimisen osa-alueella tavoitteiksi mainitaan esimerkiksi tarkkojen havaintojen tekeminen, uteliaisuuden virittäminen sopivien ongelmanratkaisutehtävien avulla ja ympäristön jäsentämisen taidon vahvistaminen. Omien kokemusten ja havaintojen tekeminen sekä uuden löytäminen ja keksiminen esitetään olennaisena osana ajattelun taitojen ja oppimaan oppimisen kehittymisessä. Monilukutaidon osana mainitaan erilaisiin numeerisiin ja symbolisiin merkkijärjestelmiin tutustuminen ja työelämätaidojen ja yrittäjyyden osana oppilaita kannustetaan tutkimaan uusia asioita, toiminaan yhteistyössä ja harjoittelemaan omien ajatusten ja ideoiden yhteensovittamista toisten kanssa. (POPS 2014.)

Matematiikan tehtävää oppiaineena kuvataan seuraavasti: “Matematiikan opetuksen tehtävä on kehittää oppilaiden loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua” (POPS 2014, 128). Luova matemaattinen ajattelu ei ole mahdollista ilman algebrallisen ajattelun osaamista. Ilman kykyä yleistää, tehdä johtopäätöksiä ja nähdä eri tekijöiden välisiä suhteita, ilman varsinaista syvempää ymmärrystä on mahdotonta olla luova.

Eryteisesti vuosiluokkien 1-2 matematiikan opetukselle tyypillisiksi piirteiksi POPS:issa on mainittu monipuoliset kokemukset matematiikasta. Niiden avulla oppijalle rakentuu perusta matemaattisille käsitteille ja rakenteille. Oppilaiden matemaattisen ajattelun ilmaisun kehittyminen on yksi opetuksen tavoite. Tähän

pyrittäessä oppilaalle annetaan mahdollisuus ilmaista ajatteluaan myös sanallisesti, toimintavälineillä sekä piirtämällä kirjallisen tuottamisen lisäksi.

POPS:n tavoitteissa määrittävänä tekijänä on oppilaan oma toimijuus. Vuosiluokkien 1-2 matematiikan tavoitteille tyypillisiä ilmaisuja ovat esimerkiksi "tukea, ohjata ja kannustaa". Oppilasta ei nähdä kohteena tai suorittajana vaan aktiivisena toteuttajana ja toimijana. Oppilaita tulee esimerkiksi ohjata tekemään havaintoja matematiikan näkökulmasta, kehittämään päättely- ja ongelmanratkaisutaitojaan, ymmärtämään matemaattisia käsitteitä ja kannustaa esittämään ratkaisujaan monipuolisesti.

Sisältöalueista ajattelun taitojen tavoitteissa mainitaan erityisesti yhtäläisyyksien, erojen ja säännönmukaisuuksien löytämisen mahdollistaminen ja eri näkökulmien löytäminen. Varsinaisiin lukujen ja laskutoimitusten sisältöihin on erikseen kirjattu lukujen 1-10 hajotelmiin perehtyminen.

Matematiikan oppimisen tuesta sanotaan "tarjottava tuki antaa oppilaille mahdollisuuden kehittää taitojaan niin, että oppimisen ja osaamisen ilo säilyvät" (POPS 2014, 130). Tuen tulisi siis edistää oppilaiden taitoja, luoda uusia ajattelumalleja ja -strategioita, joiden avulla tukea saavat oppilaat pystyvät rakentamaan matemaattista ajatteluaan. Myös arvioinnin kohteissa 1-2 vuosiluokilla mainitaan erikseen matemaattiset ongelmanratkaisutaidot.

Suomessa vuoteen 1992 opetushallitus tarkisti, että oppikirjat vastaavat voimassa olevaa opetussuunnitelmaa. Koska oppimateriaalit käsittävät nykyään paljon enemmän kuin pelkän oppikirjan, ennakkotarkistuksesta on luovuttu, ja nykyään vastuu oppimateriaalin ja opetussuunnitelman yhteensopivuudesta on materiaalin julkaisijalla. Luottamus oppikirjojen opetussuunnitelman mukaisuuteen on säilynyt tarkastamisesta luopumisen jälkeenkin. Moni opettaja pitääkin kirjasarjan tuomasta

turvallisuuden tunteesta ja vastuuvapaudesta, kun heidän ei itse tarvitse ottaa selvää opetettavista aiheista. Oppikirja on usein opetussuunnitelmaa tärkeämpi väline opetuksen suunnittelussa ja lähes kaikki esimerkit ja tehtävät, joita oppitunnilla käsitellään, ovat peräisin oppikirjasta. (Lepik, ym. 2015.)

Oppikirjoissa käsiteltävien sisältöjen vastaavuus opetussuunnitelmaan on kohtuullisen helposti jokaisen opettajan tarkistettavissa. Tehtävien ja oppituntien sisäisten toimintojen osalta tilanne on vaikeampi. Opettajalla tulisi itsellään olla riittävä matemaattinen itseluottamus, jotta hän pystyy tarkastelemaan kirjasarjojen tehtäviä suhteessa opetussuunnitelmaan ja toisaalta oppilaiden ajattelun kehittymisen tarvitsemaan tukeen.

3 TUTKIMUKSEN TARKOITUS JA TUTKIMUSKYSYMYKSET

Tutkimuksen tarkoituksena on kuvata kahden ensimmäiselle luokalle tarkoitettujen matematiikan oppikirjan tehtäviä. Näkökulmana on tarkastella, kuinka oppikirjat tukevat matemaattisen ja erityisesti algebrallisen ajattelun kehittymistä.

Työelämässä alakouluikäisten parissa olen huomannut, että ylempiä luokkia kohti mentäessä matematiikasta ei pidetä yhtä paljon kuin alaluokilla. Samoin olen huomannut, että iso osa matematiikan opetuksesta perustuu nimenomaan valmiisiin matematiikan oppikirjoihin. Halusin lähteä tutkimaan alkuopetuksen ja erityisesti ensimmäisen luokan matematiikan oppikirjoja ja niiden tehtäviä. Kannustavatko oppikirjojen tehtävät itsenäiseen matemaattiseen ja algebralliseen ajatteluun? Ohjaavatko tehtävät oivaltamiseen ja ymmärtämiseen? Korostuuko tehtävissä mekaaninen laskutoimitusten suorittaminen? Minkälaisia eroja eri kirjasarjojen välillä tehtävissä on?

Päätin tutkia pro gradu -työssäni seuraavaa:

Miten ensimmäiset luokan matematiikan oppikirjat tukevat algebrallisen ajattelun kehittymistä?

POPS:ssa (2014) matematiikan tavoitteisiin liittyviin keskeisiin sisältöalueisiin liitetään esimerkiksi oppilaiden mahdollisuudet löytää yhtäläisyyksiä ja säännönmukaisuuksia, luokitella sekä havaita syy- ja seuraussuhteita. Erikseen mainitaan perehtyminen lukujen 1-10 hajotelmiin. Tähän peilaten tutkimuksessani on kaksi alakysymystä.

Ensimmäinen alakysymys: minkälaisia yhteen- ja vähennyslaskuihin ja hajotelmiin liittyviä tehtäviä 1.-luokan matematiikan oppikirjoissa on?

Tutkin, miten nämä tehtävät on sijoittuneet? Ovatko ne pelkästään viimeisinä, "vaikeina" tehtävinä vai onko niitä tarjolla myös kappaleen alussa? Miten niitä voisi luokitella? Tukevatko tehtävät POPS:n tavoitteisiin pääsemistä ja auttavatko ne oppilaita laajentamaan matemaattista ajattelua pelkästä mekaanisesta suorittamisesta?

Toisena alakysymyksenä on: miten tutkittujen kirjasarjojen sisällöt eroavat toisistaan?

Tutkin, mitä yhteisiä ja eroavia piirteitä kirjoissa on. Onko niiden rakenne samanlainen? Onko jommassa kummassa kirjassa tietty tehtävätyyppi enemmän edustettuna kuin toisessa? Miten eri tyyppiset tehtävät esiintyvät kirjan edetessä?

4 TUTKIMUKSEN EMPIIRINEN TOTEUTUS

4.1 Tutkimusote

Tutkimus on toteutettu oppikirja-analyysinä ja kohteena Milli-kirjasarjan sekä Tuhattaituri-kirjasarjan ensimmäisen luokan syyslukaudelle suunnitellut oppikirjat. Tutkimuksen tarkoitus on tutkia, kuinka usein ja miten sijoittuneena tutkimukseen valitut tehtävyytyypit oppikirjoissa esiintyvät. Tutkimuksen kohteena on erityisesti tehtävien määrien vertailu eri kirjasarjoissa.

Tutkimus edustaa siis kvantitatiivista tutkimusotetta, jossa aineisto on analysoitu sisällönanalyttisesti (Heikkilä 2014, Tuomi & Sarajärvi 2018,). Analyysi on aineistolähtöistä (Tuomi & Sarajärvi 2018).

Tehtävät on luokiteltu samankaltaisuuksien mukaan. Lisäksi ne on paikannettu oppikirjaan sekä lukukauden etenemiseen suhteen että kappaleen sisäisen sijoittumisen mukaan.

4.2 Tutkimusaineisto

Tutkittavat kirjat ovat Kustannusosakeyhtiö Otavan kustantama Tuhattaituri 1a (2014) ja Sanoma Pro Oy:n kustantama Milli 1a (2018). Kummankin kirjasarjan kirja on rakenteeltaan samanlainen. Materiaali on suunniteltu alkaamaan lukukauden alusta elokuussa ja loppumaan syyslukukauden lopussa jouluna ja yksi kappale käsittää yhdellä oppitunnilla opiskeltavat asiat. Kumpikin kirja on

suunniteltu siten, että ensimmäisellä luokalla on kolme vuosiviikkotuntia matematiikkaa.

Tuhattaiturissa on 189 sivua ja kirja on jaettu viiteen jaksoon. Kuudentena jaksona on kuusi erillailsta tutkimustehtävää. Yksi jakso käsittelee yhtä aihepiiriä siten, että matemaattiset perustaidot kehittyvät kohti kirjan loppua. Ensimmäisessä jaksossa aiheena on lukukäsitys, toisen yhteen- ja vähennyslaskut, kolmannen yhteen- ja vähennyslaskun yhteys, neljännen puuttuva yhteenlaskettava ja vähentäjä ja viidennen pitkät yhteen- ja vähennyslaskut. Jaksoihin sisältyy myös kertaavia Harjoittelun -kappaleita ja jaksos lopussa on Tähtipysäkki- kappale, joka toimii yhteenvetona jaksossa opiskeltuihin aiheisiin. Tätä kappaletta voi käyttää sekä formatiiviseen arviointiin että oppilaan suorittamaan itsearviointiin.

Milli on jaettu neljään jaksoon ja viidentenä jaksona on kolme kappaletta käsittävä ohjelmoinnin alkeisiin tutustuttava jakso. Millissä on 211 sivua. Millissä jaksot jakaantuvat pääasiassa lukualueiden eikä aihealueiden mukaan kuten Tuhattaiturissa. Ensimmäisessä jaksossa tutustutaan matematiikan maailmaan, toisen aiheena on luvut 0-5, kolmannen yhteen- ja vähennyslasku lukualueella 0-6 ja neljännen jaksos luvut 7-10. Tuhattaiturin tapaan jaksosihin sisältyy kertaavia kappaleita ja jaksos lopussa on testinä toimiva kappale. Millissä kappaleiden rakenne poikkeaa Tuhattaiturissa siten, että jaksos alussa on niin sanottu jaksos teeman virittelevä kappale. Tämä aloituskappale mahdollistaa myös erilaiset toiminnalliset jaksos aiheeseen johdattavat tehtävät. Millissä on Tuhattaiturin tavoin erilaisia projektit- ja tutkimustehtäviä, mutta nämä sijoittuvat aina yhdelle aukeamalle jokaisen jaksos loppuun.

Kappaleiden sisäinen rakenne kirjoissa noudattaa samaa kaavaa. Ensimmäisellä sivulla on opetusruutu, jossa kappaleen aihe esitellään esimerkein ja kuvin. Ensimmäisellä sivulla on myös 1-3 yksinkertaista aiheeseen liittyvää tehtävää,

jotka johdattavat aiheen oppimiseen. Toisen sivun tehtävät vahvistavat opittua ja pyrkivät luomaan aiheen käsittelyyn laskurutiinin. Syventävät tehtävät sijoittuvat kolmannelle ja neljännelle sivulle. Neljännellä sivulla on usein myös ongelmanratkaisuun liittyvä, ajattelua haastava tehtävä.

Kummassakin kirjassa on erillinen kotitehtäviksi tarkoitettu osio. Millissä tämä osio sijoittuu kappaleen neljännelle sivulle, Tuhattaiturissa toisen sivun alareunaan. Kummassakin kirjassa kotitehtäväksi tarkoitettu osuus sisältää yhdestä kolmeen lyhyttä tehtävää. Lisäksi Millissä koko kappaleen viimeisenä tehtävänä on Millimittari -niminen osio, joka kokoaa ja kertaa kappaleessa käsitellyn aiheen.

4.3 Aineiston analyysi

Aineiston analysointi tapahtui aineistolähtöisen sisällönanalyysin avulla alla kuvatulla tavalla (Tuomi & Sarajärvi, 2018). Ennen analysointia analyysiyksiköksi määriteltiin yksi oppikirjan tehtävä. Tutkimuksessa tarkastellaan nimenomaan tehtävien eikä yksittäisten laskujen lukumäärää ja sijaintia. Yksi tehtävä voi sisältää useamman yksittäisen laskun.

Ensimmäinen vaihe aineiston analysoinnissa oli lukea oppikirjat läpi kappale kerrallaan. Tutkimuksessa käsitelty aineisto on kerätty oppikirjoista tehtävä kerrallaan merkitsemällä. Jokaiselle tutkimuksessa tarkastellulle tehtävälle annettiin juokseva numero ja tämän jälkeen tutkimukseen valitut tehtävät ryhmiteltiin samankaltaisuuksien mukaan viiteen eri luokkaan. Luokka merkittiin jokaisen tehtävän kohdalle omalla koodilla. Luokat nimettiin seuraavasti: hajotelmatehtävät, kuvatuelliset yhteen- ja vähennyslaskut, numeeriset yhteen- ja

vähennyslaskut, puuttuva luku yhteen- ja vähennyslaskuissa sekä yhteen- ja vähennyslaskut lukusuoralla.

Sisällönanalyysilla saatujen tulosten analysointia jatkettiin kvantitatiivisen havaintotutkimuksen menetelmin (Heikkilä, 2014). Eri tehtävätyypeille ja tehtävän sijainnille kappaleen sisällä annettiin muuttujat. Kappalenumero toimii indikaattorina, missä kohtaa lukukautta kappale on suunniteltu käsiteltäväksi. Kappale 1 opiskellaan lukukauden alussa ja viimeinen kappale, Millissä kappale 45 ja Tuhattaiturissa kappale 43, lukukauden lopussa ennen joulua.

Aineisto syötettiin taulukkolaskentaohjelmaan havaintomatriisiin siten, että ensimmäisessä sarakkeessa oli yksittäiselle tehtävälle annettu juokseva, tehtävän identifioiva numero. Seuraavassa sarakkeessa määriteltiin kappaleen numero, jossa tehtävä esiintyy. Kolmanteen sarakkeeseen määriteltiin kyseisen tehtävän tyyppi sisällönanalyysissa saatujen luokkien mukaan (numerot 1-5). Neljännessä sarakkeessa tehtävän paikka kappaleen sisällä (kappaleen 1., 2., 3. vai 4. sivu vai kotitehtäväosio) numeroilla 1-5. Jos kappaleessa ei esiintynyt yhtään tutkimuksessa käsiteltäviä tehtävätyyppejä, puuttuvan tiedon koodiksi määriteltiin 0. (Heikkilä, 2014.)

Aineistoa on siis analysoitu taulukkolaskentaohjelmalla näiden kolmen muuttujan; tehtävän tyyppi, sijainti kappaleen sisällä sekä sijainti kirjassa kappalenumeron mukaan. Aineistosta on muodostettu sekä piirakka- että pylväskuviota.

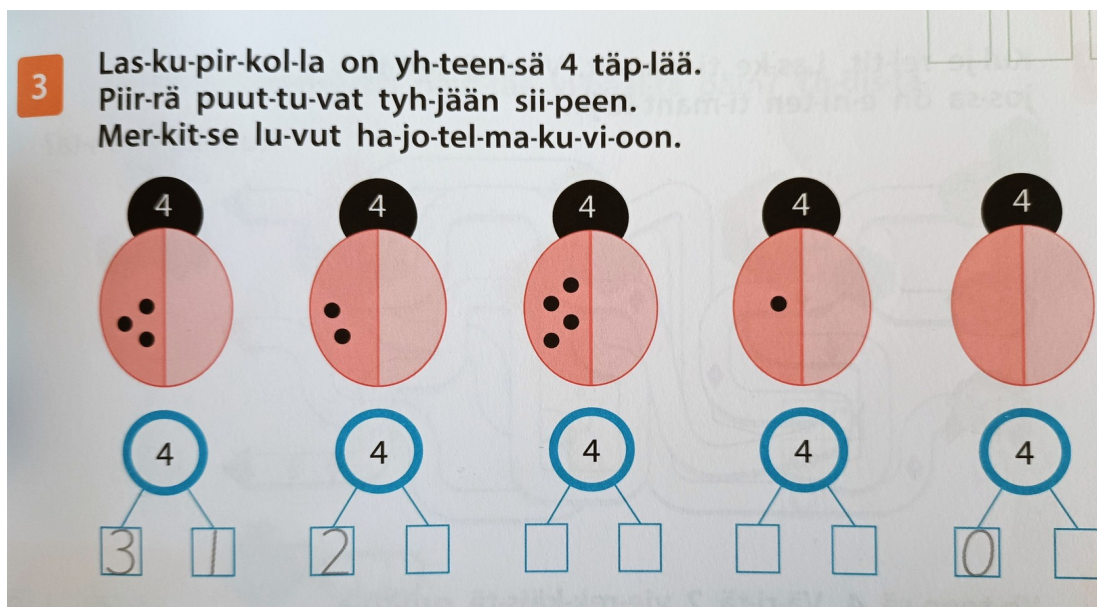
Ensimmäisessä vaiheessa tutkittiin eri tehtävätyyppien esiintymisen kokonaismääriä ja niiden suhteita kummassakin kirjassa erikseen. Näiden tietojen graafiseen esittämiseen valittiin piirakkakuviota, koska se havainnollistaa kokonaisuuden jakautumista osiin (Heikkilä, 2014).

Tämän jälkeen siirryttiin tarkastelemaan yksittäisiä tehtävätyyppejä. Tutkimuksen kohteena oli tietyn tehtävätyypin tehtävien sijainti yksittäisen kappaleen sisällä sekä kirjan kappaleissa ylipäätään. Taulukoidut tulokset järjesteltiin ensin tehtävätyypeittäin ja jokaisen tehtävätyypin sisällä ensin kappaleen sisäisen sijainnin mukaan. Tämän jälkeen aineisto järjesteltiin vielä jokaisen tehtävätyypin sisällä kappalenumeron mukaan. Näiden tulosten esittämiseen valittiin pylväskuvio, koska se tuo esiin lukumäärät ja helpottaa niiden vertaamista (Heikkilä, 2014). Koska tutkimuksen tarkoitus on verrata eri kirjoja keskenään, saadut tulokset on viety tehtävätyyppi kerrallaan samaan pylväskuvioon.

5 TUTKIMUSTULOKSET

5.1 Tehtävätyyppien esittely

Hajotelmatehtävissä tutkitaan, miten eri tavoilla luvut kolmesta kymmeneen voidaan jakaa osiin. Niihin ei liity varsinaista symboleilla tehtävää laskutoimitusta, kuten yhteenlaskua. Esimerkkinä tehtävätyypistä on kuvassa 1 esitetty luvun 4 hajotelma.



Kuva 1: Häkkinen, ym. 2018, 47

Milli- ja Tuhattaituri-sarjojen ensimmäisen luokan syyslukukaudelle varatuissa materiaaleissa peruslaskutoimituksissa operoidaan luvuilla, jotka ovat alle kymmenen. Olen tarkastellut yhteen- ja vähennyslaskujen eri tehtävämuotoja

hajotelmatehtävien lisäksi, koska niiden matemaattinen periaate on sama kuin hajotelmatehtävissä. Kuuden voi hajottaa kahdeksi ja neljäksi, kaksi ja neljä on yhdessä kuusi ja jos kuudesta otetaan pois neljä, jää kaksi.

Aineistosta pystyi erottamaan kaksi erilaista tehtävätyyppiä koskien perusmuotoisia yhteen- ja vähennyslaskuja. Toisessa tehtävätyypissä numeerisen, symboleilla suoritettavan laskun lisäksi oli konkretiaa lisäävä kuvatuki (kuva 2).

2 Kuin-ka mon-ta o-ra-va-a on yh-teen-sä? Tee yh-teen-las-ku.

The worksheet contains six math problems arranged in three rows and two columns. Each problem consists of two groups of squirrel icons and a corresponding addition equation with empty boxes for numbers.

- Row 1, Left: Two groups of two squirrels each. Equation: $2 + 2 = \square$
- Row 1, Right: One group of one squirrel and one group of five squirrels. Equation: $\square + \square = \square$
- Row 2, Left: One group of three squirrels and one group of two squirrels. Equation: $\square + \square = \square$
- Row 2, Right: One group of two squirrels and one group of three squirrels. Equation: $\square + \square = \square$
- Row 3, Left: One group of four squirrels and one group of two squirrels. Equation: $\square + \square = \square$
- Row 3, Right: One group of one squirrel and one group of four squirrels. Equation: $\square + \square = \square$

Kuva 2: Häkkinen, ym. 2018, 82

Toinen tehtävätyyppi oli puhtaasti numeerinen, jossa laskeminen tapahtuu symboleilla ilman konkreettista tukea (kuva 3).

4. Las-ke.

$2 + 3 = \square$

$\square = 3 + 3$

$6 - 2 = \square$

$6 - 3 = \square$

$1 + 5 = \square$

$\square = 4 + 1$

$5 - 3 = \square$

$5 - 4 = \square$

$4 + 2 = \square$

$\square = 2 + 4$

$6 - 4 = \square$

$5 - 2 = \square$

Kuva 3: Forsback, ym. 2014, 83

Nämä tehtävätyypit on erotettu omiksi luokikseen, koska tehtävien ratkaisussa on mahdollista käyttää erilaisia strategioita tehtävätyypeistä riippuen.

Perusmuotoisten tehtävien lisäksi aineistosta nousi esille puuttuvan yhteenlaskettavan tai puuttuvan vähentäjän tehtäviä. Puuttuvan luvun tehtävät ovat perusmuotoisten yhteen- ja vähennyslaskujen sovelluksia. Kuvassa 4 on esitetty kappaleen toisella sivulla oleva puuttuvaa yhteenlaskettavaa koskeva tehtävä. Tehtävässä etsitään erilaisia yhdistelmiä, joiden lopputulos on seitsemän palloa.













3 Palloja on yhteensä 7. Piirrä puuttuvat pallo.
Täydennä puuttuva luku.

$3 + \square = 7$ $5 + \square = 7$ $4 + \square = 7$ $6 + \square = 7$

Kuva 4: Häkkinen, ym. 2018, 155

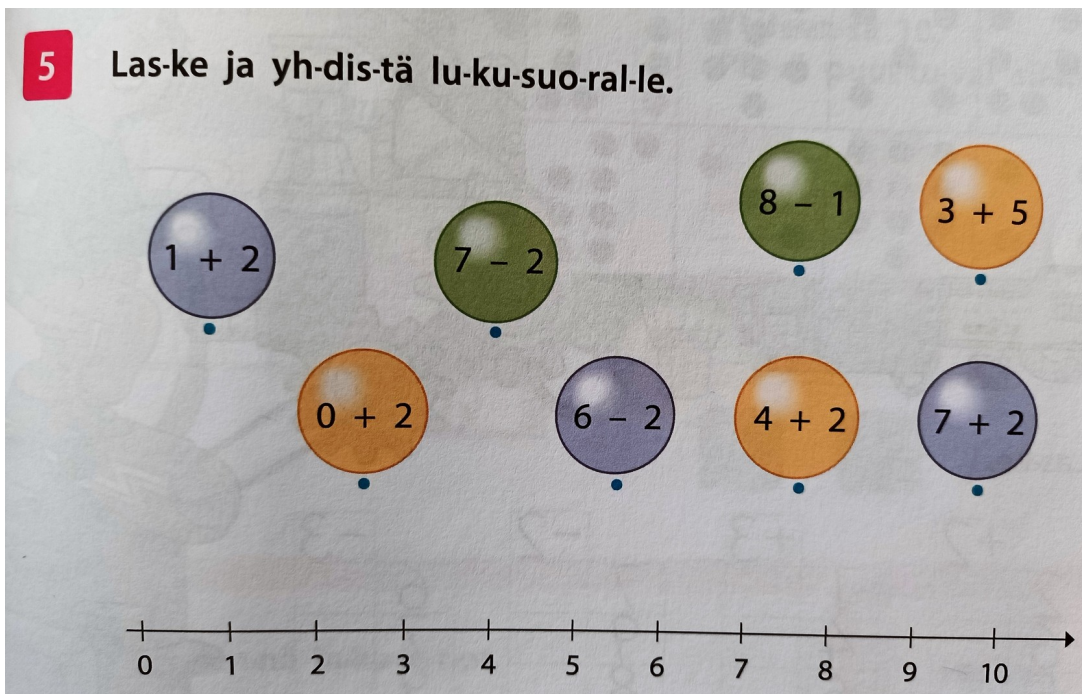
Puuttuvan luvun tehtävätyypissä on mukana myös haastavammat, kohti yhtälönratkaisua ja algebraa ohjaavat tehtävät (kuva 5). Näissä tehtävissä yksi tai useampi numero on korvattu kuviolla. Edeltävän kuvion numeerista arvoa tarvitaan, että seuraavan kuvion arvo saadaan ratkaistua.

**10. Jo-kai-nen ku-va tar-koit-taa yh-tä lu-ku-a.
Rat-kai-se lu-vut.**

 +  = 2	 = <input type="text"/>
 +  +  = 5	 = <input type="text"/>
5 -  -  -  = 	 = <input type="text"/>

Kuva 5: Forsback ym., 2014, 109

Viides tehtävätyyppi on yhteen- ja vähennyslasku lukusuoralla (kuva 6). Näillä tehtävillä tarkoitetaan tässä laskutoimituksia, joiden vastaus täytyy sijoittaa lukusuoralle. Nämä poikkeavat numeerista laskutoimituksista lähinnä siten, että tehtävissä on otettu mukaan lukusuora matemaattisena ilmiönä, sen tarkastelu ja lukusuorakäsityksen vahvistaminen.



Kuva 6: Häkkinen, ym. 2018, 175

5.2 Kirjojen vertailu

Tutkimuksessa selvitettiin yllä esiteltyjen eri tehtävätyyppien lukumäärää ja jakautumista kahdessa kirjasarjassa ja vertailtiin niitä. Tuloksena saatiin kahdenlaista informaatiota. Ensimmäinen tulos oli tehtävien kokonaislukumäärät ja eri tehtävätyyppien suhteet sekä oppikirjan sisällä että kirjojen välillä. Toinen tulos oli eri tehtävätyyppien sijoittuminen kirjan kappaleiden sisällä ja lukuvuoden mittaan.

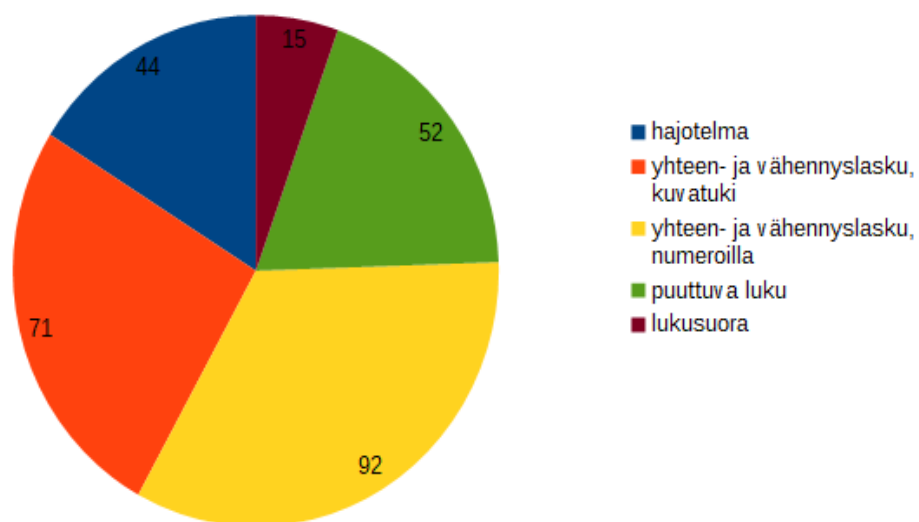
5.2.1 Tehtävätyyppien jakautuminen

Millissä oli tässä tutkimuksessa tarkasteltuja tehtäviä ylipäätään enemmän (272 kappaletta) kuin Tuhattaiturissa (212 kappaletta). Millissä on yhteensä 45 oppituntikappaletta ja Tuhattaiturissa 43 oppituntikappaletta.

Kuvissa 7 ja 8 on esitetty eri tehtävätyyppien jakautuminen kirjoissa. Kummassakin kirjassa suurin osa tarkastelluista tehtävistä on numeerisia yhteen- ja vähennyslaskuja, Millissä 92 (34%) ja Tuhattaiturissa 99 (47%) kappaletta. Numeeriset yhteen- ja vähennyslaskut on ainoa tehtävätyyppi, jossa tehtäviä on enemmän Tuhattaiturissa kuin Millissä.

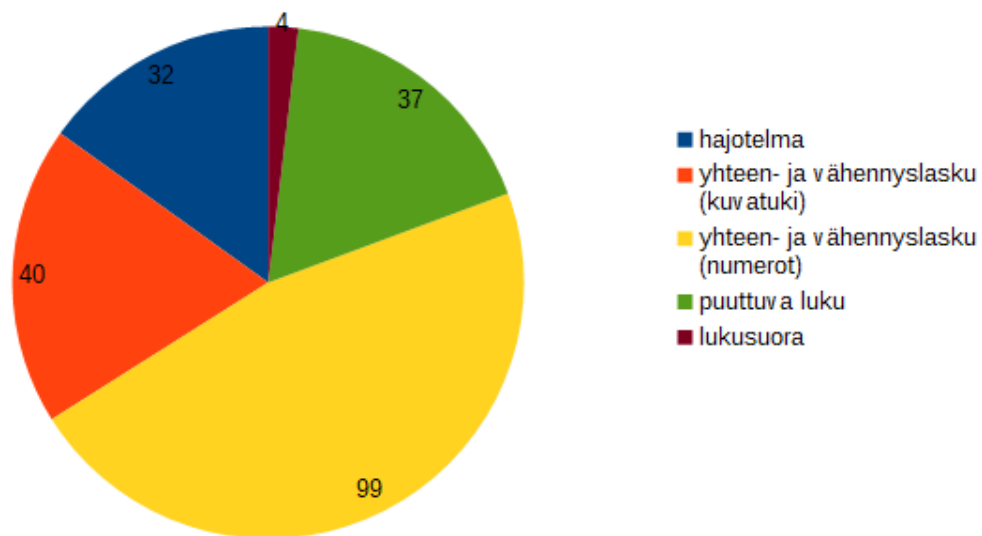
Millissä kuvatuellisia yhteen- ja vähennyslaskuja on selkeästi enemmän (71 kappaletta, 26%) kuin Tuhattaiturissa (40 kappaletta, 19%). Hajotelmatehtäviä Millissä on 44 kappaletta (16%), Tuhattaiturissa 32 kappaletta (15%) ja puuttuvan luvun tehtäviä Millissä 52 kappaletta (19%) kun taas Tuhattaiturissa 37 (17%) kappaletta. Selkeästi pienin osa kummassakin kirjassa on lukusuoralle sijoitettavia yhteen- ja vähennyslaskuja. Millissä niitä on 15 kappaletta (5%) ja Tuhattaiturissa 4 kappaletta (2%).

Tehtävätyyppien jakaantuminen, Milli



Kuva 7: Tehtävätyyppien jakaantuminen, Milli

Tehtävätyyppien jakaantuminen, Tuhattaituri

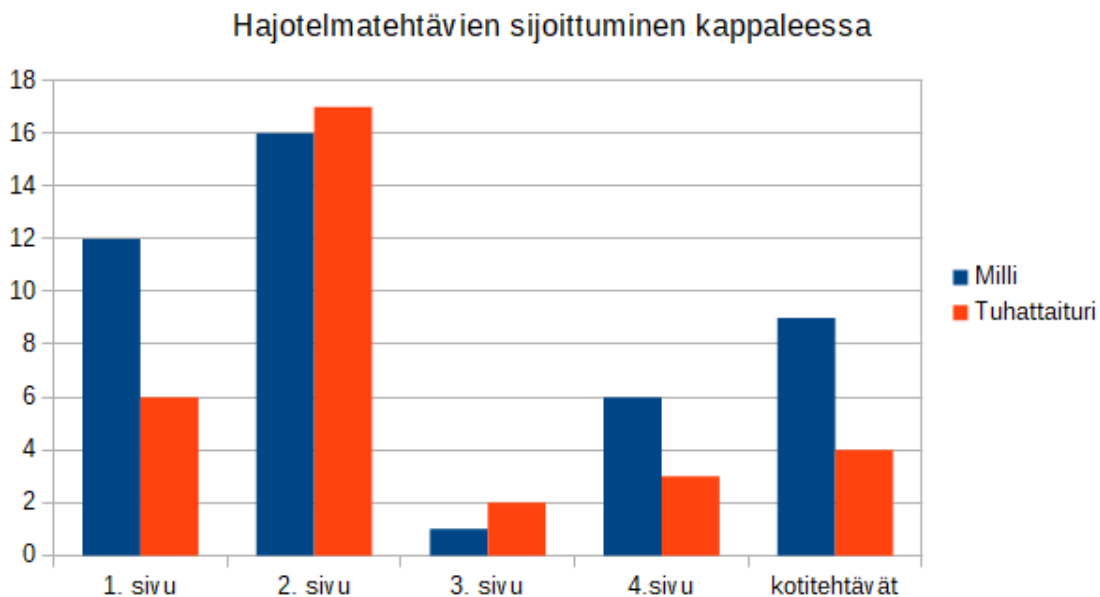


Kuva 8: Tehtävätyyppien jakautuminen, Tuhattaituri

5.2.2 Tehtävätyyppien sijoittuminen kirjoissa

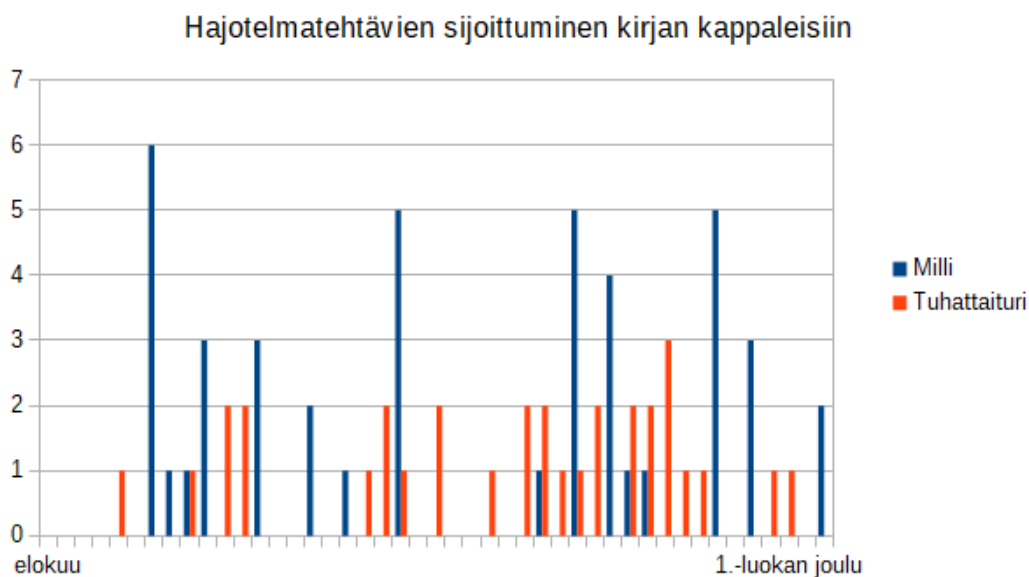
Hajotelmatehtävät

Kuvassa 9 on esitetty hajotelmatehtävien sijoittuminen oppitunnin kappaleen sisällä. Millissä on 12 kertaa ja Tuhattaiturissa 6 kertaa hajotelmatehtävä kappaleen ensimmäisellä sivulla. Kappaleen toisella sivulla kummassakin kirjassa hajotelmatehtäviä on lähes yhtä usein, Millissä 16 ja Tuhattaiturissa 17 kertaa. Kolmannen ja neljännen sivun soveltavissa tehtävissä hajotelmatehtäviä ei juuri esiinny kummassakaan kirjassa. Millissä hajotelmatehtävä on kolmannella sivulla kerran ja Tuhattaiturissa kaksi kertaa. Neljännellä sivulla tehtävä on Millissä 6 kertaa ja Tuhattaiturissa kolme kertaa. Kotitehtävissä tätä tehtävätyyppiä on Millissä 9 kertaa ja Tuhattaiturissa 4 kertaa.



Kuva 9: Hajotelmatehtävien sijoittuminen kappaleen sisällä

Tuhattaiturissa hajotelmatehtäviä esiintyy tasaisesti pitkin lukukautta yksi tai kaksi samassa kappaleessa, kun taas Millissä tehtäviä on enimmillään kuusi erillistä tehtävää yhdessä kappaleessa. Lukukauden aikana hajotelmatehtäviä sisältäviä kappaleita on Millissä (16 kertaa) lukumääräisesti vähemmän kuin Tuhattaiturissa (21 kertaa). (Kuva 10)

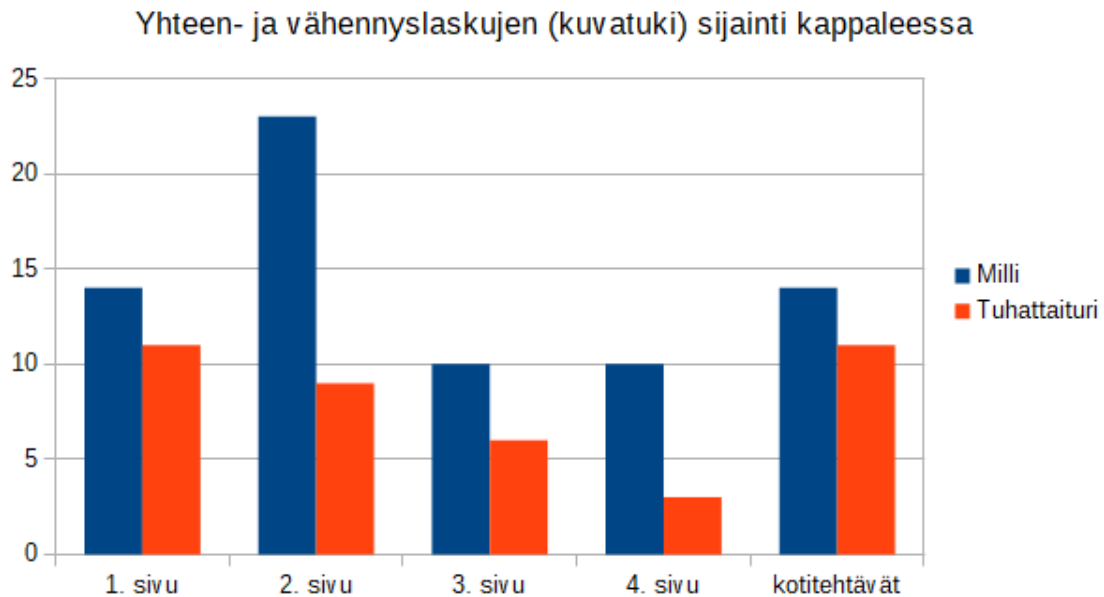


Kuva 10: Hajotelmatehtävien sijoittuminen kirjan kappaleisiin

Kuvatuelliset yhteen- ja vähennyslaskut

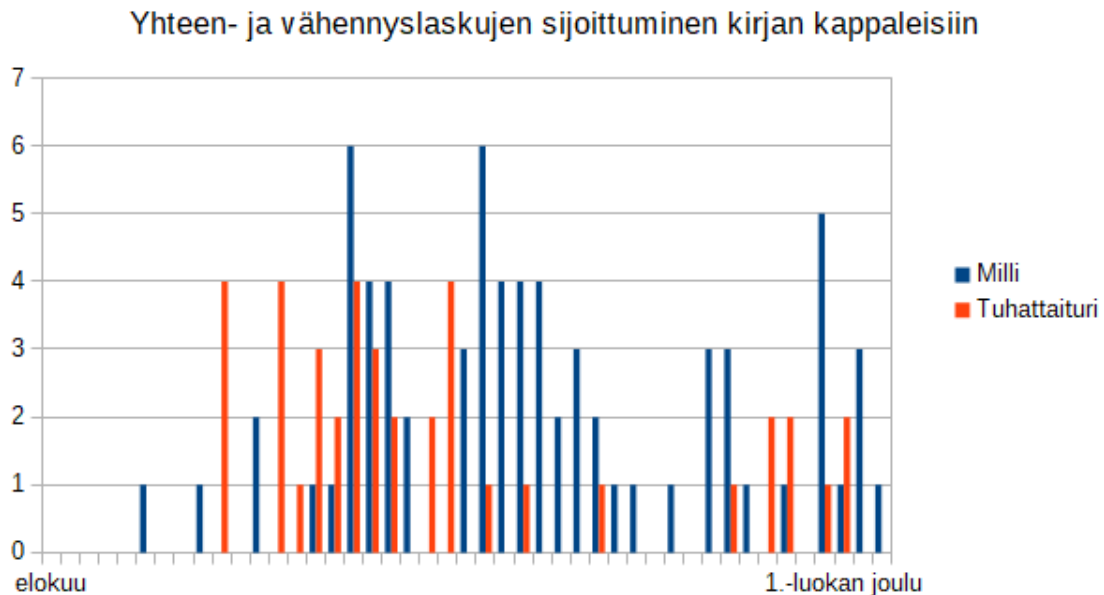
Kuvatuelliset yhteen- ja vähennyslaskut sijoittuvat kummassakin kirjassa suurelta osin kappaleen ensimmäiselle ja toiselle sivulle. Millissä tämä tehtävätyyppi esiintyy ensimmäisellä sivulla 14 ja toisella sivulla 23 kertaa. Tuhattaiturissa vastaavasti se on ensimmäisellä sivulla 11 ja toisella sivulla 9 kertaa. Tuhattaiturissa tämän tehtävätyypin tehtävien määrä laskee tasaisesti kappaleiden ensimmäisiltä sivuilta kohti neljättä sivua ja tehtävätyyppi esiintyy neljännellä sivulla vain kolme kertaa. Millissä tehtävätyyppejä on kolmennella ja neljännellä sivulla yhtä usein,

kummallakin 10 kertaa. Kotitehtäväksi tarkoitettussa kappaleen osassa kuvatuellisia yhteen- ja vähennyslaskuja on yhtä usein kuin kappaleen ensimmäisellä sivulla, Millissä 14 ja Tuhattaiturissa 11 kertaa. (Kuva 11)



Kuva 11: Kuvatuellisten yhteen- ja vähennyslaskujen sijoittuminen kappaleen sisällä

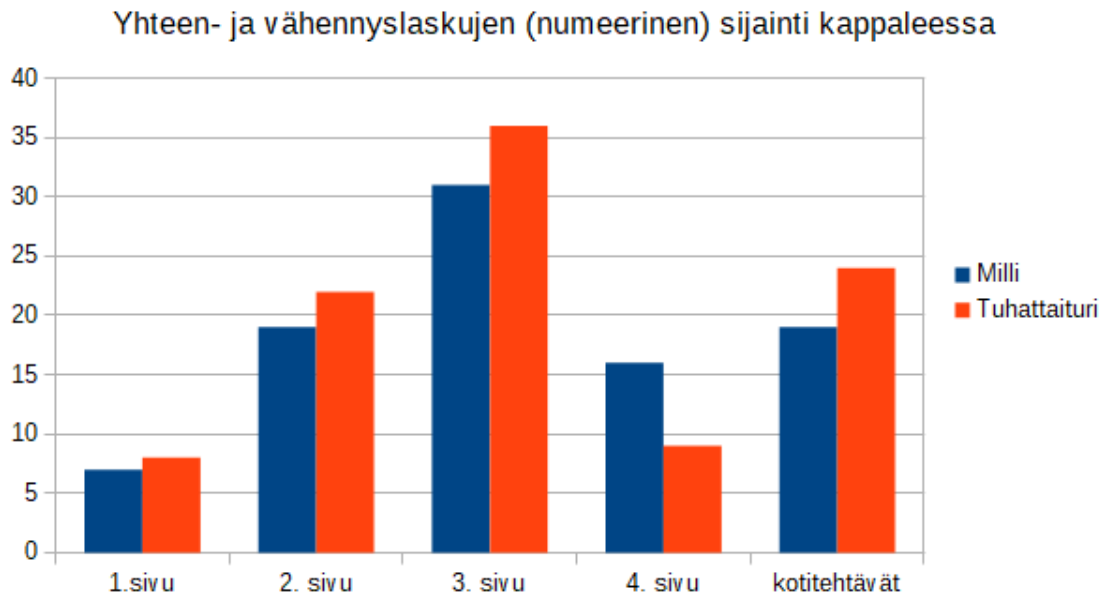
Kuvassa 12 näkyy, että Tuhattaiturissa kuvatuellisia yhteen- ja vähennyslaskuja on yhteensä 18 kappaleessa, Millissä 28 kappaleessa. Millissä tehtävätyyppi tulee ensimmäisen kerran aiemmin lukukaudella kuin Tuhattaiturissa, mutta suurin osa Tuhattaiturin kuvatuellisista yhteen- ja vähennyslaskuista sijoittuu ajallisesti varhaisempaan vaiheeseen lukukautta kuin Millissä. Millissä tämä tehtävätyyppi on esillä tasaisemmin pitkin lukukautta. Tuhattaiturissa kuvatuelliset yhteen- ja vähennyslaskut vähenevät selkeästi joulua kohti mentäessä.



Kuva 12: Kuvatuellisten yhteen- ja vähennyslaskujen sijoittuminen kirjan kappaleisiin

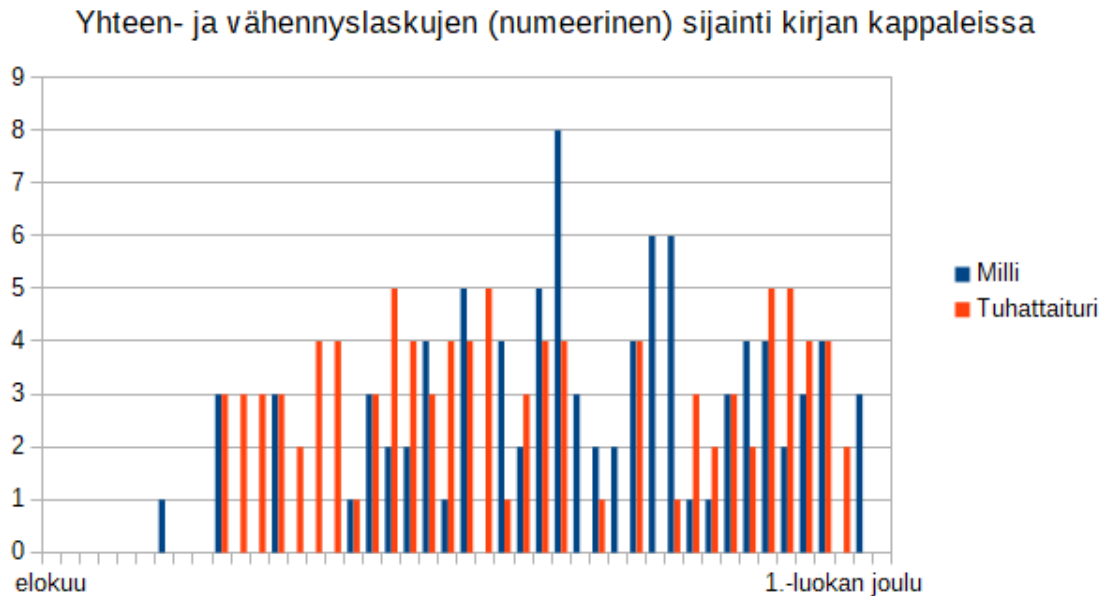
Numeeriset yhteen ja vähennyslaskut

Kuvassa 13 näkyy, että kummassakin kirjassa numeeriset yhteen- ja vähennyslaskut esiintyvät pääasiassa kappaleen kolmannella sivulla. Tuhattaiturissa näin on 36 kertaa ja Millissä 31 kertaa. Kappaleen ensimmäisellä sivulla tämän tehtävätyypin tehtävä on Millissä 7 ja Tuhattaiturissa 8 kertaa ja toisella sivulla Millissä 19 ja Tuhattaiturissa 22 kertaa. Neljännellä sivulla tehtävätyyppi esiintyy Millissä (16 kertaa) useammin kuin Tuhattaiturissa (9 kertaa). Kotitehtäväosiossa numeerisia yhteen- ja vähennyslaskutehtäviä on lähes yhtä usein kuin toisella sivulla, Millissä 19 kertaa ja Tuhattaiturissa 24 kertaa.



Kuva 13: Numeeristen yhteen- ja vähennyslaskujen sijoittuminen kappaleen sisällä

Tuhattaiturissa numeerisia yhteen- ja vähennyslaskuja on melko tasaisesti koko lukukauden ensimmäisiä kappaleita lukuunottamatta. Tuhattaiturissa tehtäviä on yhdestä viiteen yhdessä kappaleessa. Millissä numeeriset yhteen- ja vähennyslaskut lisääntyvät lukukauden puolivälissä ja painottuvat lukukauden jälkimmäiselle puoliskolle. Millissä kahdessa kappaleessa on kuusi kertaa ja yhdessä kappaleessa kahdeksan kertaa numeerinen yhteen- ja vähennyslaskutehtävä. (kuva 14)

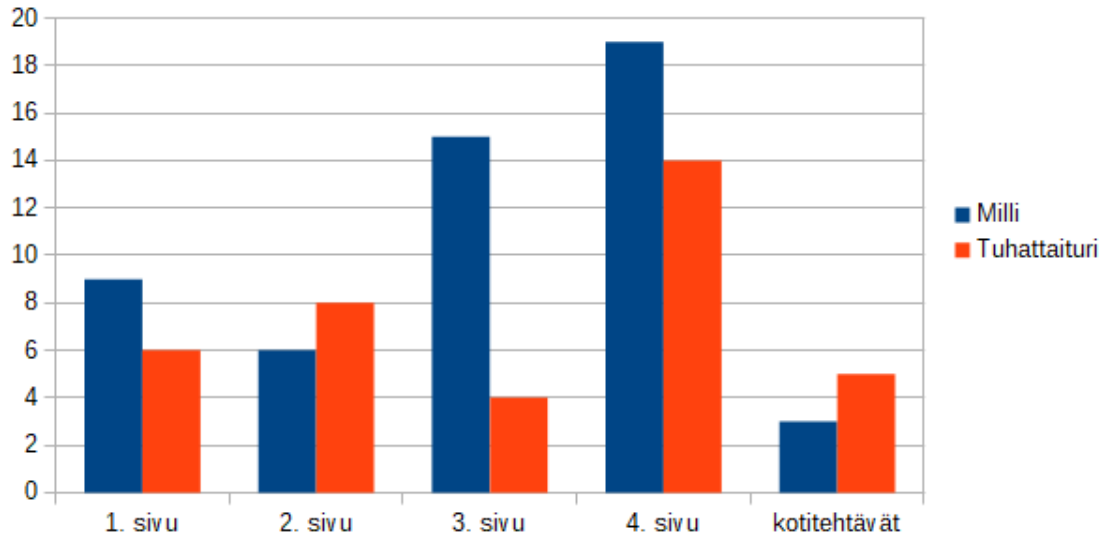


Kuva 14: Numeeristen yhteen- ja vähennyslaskujen sijoittuminen kirjan kappaleisiin

Puuttuva luku yhteen- ja vähennyslaskuissa

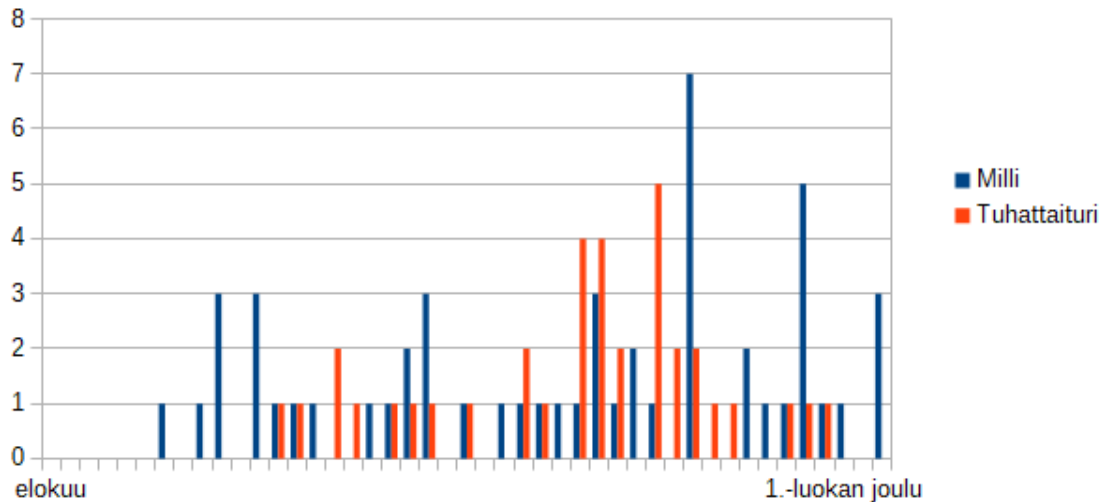
Tämä tehtävätyyppi esiintyy pääasiassa kappaleen neljännellä sivulla. Millissä näin on 19 kertaa, Tuhattaiturissa 14 kertaa. Ensimmäisellä ja toisella sivulla puuttuvan luvun tehtäviä on Millissä 9 ja 6 kertaa, Tuhattaiturissa 6 ja 8 kertaa. Kolmannella sivulla tehtävätyyppi on Millissä 19 kertaa ja Tuhattaiturissa 14 kertaa. Kotitehtäväosiossa puuttuvan luvun tehtäviä on vain harvoin, Millissä 3 kertaa ja Tuhattaiturissa 5 kertaa. (kuva 15)

Puuttuva luku yhteen- ja vähennyslaskuissa tehtävien sijainti kappaleessa



Kuva 15: Puuttuva luku yhteen- ja vähennyslaskuissa -tehtävien sijainti kappaleen sisällä

Puuttuva luku yhteen- ja vähennyslaskuissa tehtävien sijoittuminen kirjan kappaleisiin

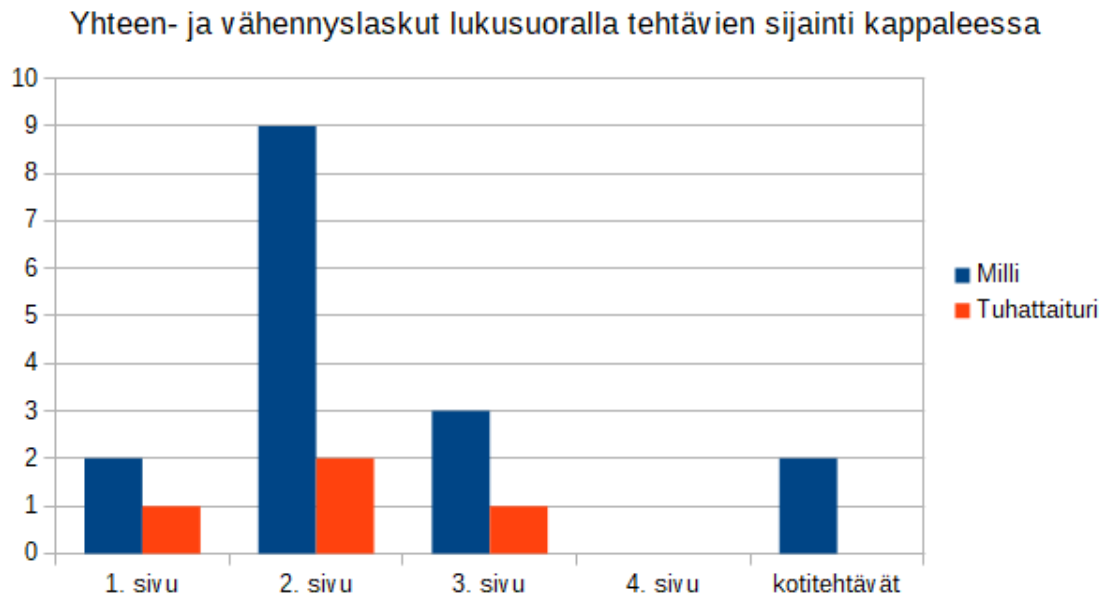


Kuva 16: Puuttuva luku yhteen- ja vähennyslaskuissa -tehtävien sijoittuminen kirjan kappaleisiin

Kuvassa 16 näkyy, että tämä tehtävätyyppi esiintyy Millissä 29 kappaleessa ja Tuhattaiturissa 21 kappaleessa. Kummassakin kirjassa tehtävien sijainti painottuu lukuvuoden loppuun. Enimmillään puuttuvan luvun tehtäviä on yhdessä kappaleessa Millissä 7 tehtävää ja Tuhattaiturissa 5 tehtävää. Millissä tehtävätyyppi on Tuhattaituria tasaisemmin osana kappaleen tehtäviä.

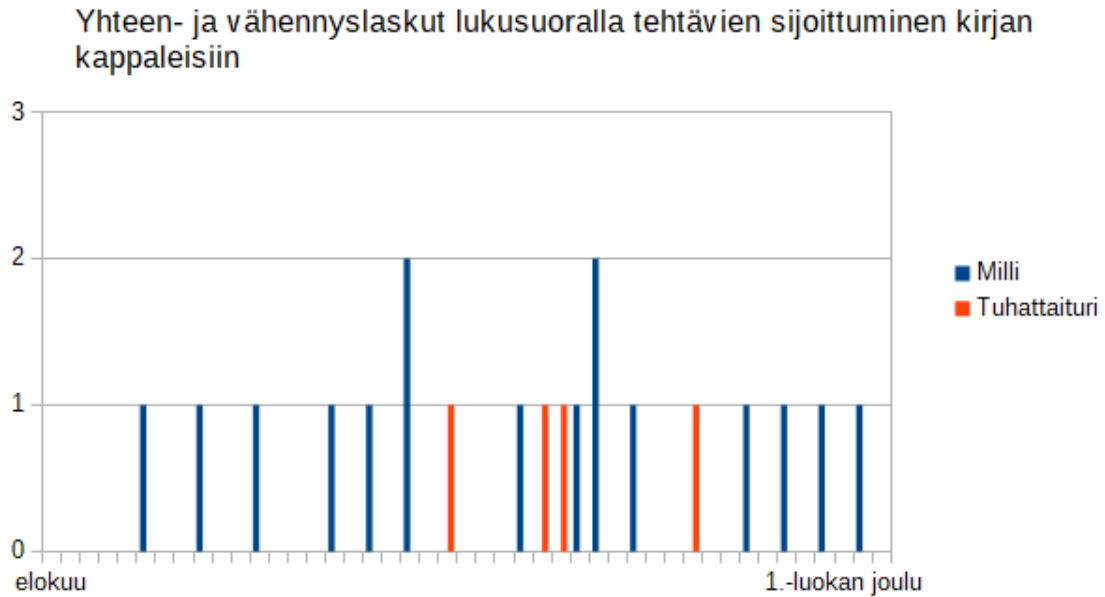
Yhteen- ja vähennyslaskut lukusuoralla

Yhteen- ja vähennyslaskutehtäviä, joissa vastaus sijoitetaan lukusuoralle on Tuhattaiturissa neljä kappaletta. Millissä näitä tehtäviä on 16 kappaletta, joista 9 tehtävää sijoittuu kappaleessa toiselle sivulle. Neljännellä sivulla näitä tehtäviä ei ole kummassakaan kirjassa ja kotitehtäväosiossa se on Millissä kaksi kertaa. (kuva 17)



Kuva 17: Yhteen- ja vähennyslaskut lukusuoralla -tehtävien sijoittuminen kappaleen sisällä

Kuvassa 18 näkyy, että tämä tehtävätyyppi esiintyy Millissä tasaisesti pitkin lukukautta, ei kuitenkaan jokaisessa kappaleessa. Tuhattaiturissa tehtävä esiintyy neljässä kappaleessa lukukauden puolivälistä eteenpäin.



Kuva 18: Yhteen- ja vähennyslaskut lukusuoralla -tehtävien sijoittuminen kirjan kappaleisiin

6 POHDINTA

6.1 Tulosten yhteenveto

Suurin osa tutkimuksessa käsitellyistä tehtävistä kummassakin kirjasarjassa oli numeerisia yhteen- ja vähennyslaskuja. Milli-kirjassa näitä oli 34% ja Tuhattaiturissa jopa 47% tutkituista tehtävistä. Seuraavaksi eniten oli kuvatuellisia yhteen- ja vähennyslaskuja, Millissä 26% ja Tuhattaiturissa 19%, puuttuvan luvun tehtäviä oli Millissä 19% ja Tuhattaiturissa 17%. Varsinaisia hajotelmatehtäviä oli Millissä 16% ja Tuhattaiturissa 15% ja lukusuoralle sijoitettavia yhteen- ja vähennyslaskuja Millissä oli 5% ja Tuhattaiturissa vain 2% tutkituista tehtävistä.

Kummassakin kirjasarjassa suurin osa numeerisista yhteen- ja vähennyslaskuista sijoittui kirjan kappaleissa toiselle ja kolmannelle sivulle sekä kotitehtäviin. Millissä tämä tehtävätyyppi esiteltiin aiemmin kuin Tuhattaiturissa, mutta toisaalta Tuhattaiturissa se vakiintui osaksi kirjan kappaleita aiemmin, noin syyskuun puolivälissä kappaleessa numero 10. Milli-kirjassa vakiintuminen tapahtui myöhemmin, kappaleessa 17.

Kuvatuelliset yhteen- ja vähennyslaskut sijoituivat Millissä useimmin toiselle sivulle, mutta toisaalta tätä tehtävätyyppiä oli Milli-kirjan kappaleissa tasaiste kaikilla neljällä kappaleen sivulla sekä kotitehtävissä. Tuhattaiturissa kuvatuellisia yhteen- ja vähennyslaskuja oli selvästi vähemmän kuin Millissä ja ne sijoituivat pääasiassa kappaleen ensimmäiselle sivulle. Neljännellä sivulla tämä tehtävätyyppi oli Tuhattaiturissa vain kolme kertaa. Tuhattaiturissa kuvatuelliset yhteen- ja vähennyslaskut sijoituivat pääasiassa syyslukukauden ensimmäiselle puolikkaalle,

kun taas Millissä niitä alkoi esiintyä enemmän vasta syyslukukauden toisella kolmanneksella ja tehtävätyyppi on mukana kirjan kappaleissa joulun asti.

Puuttuvan luvun tehtävät sijoittuivat Tuhattaiturissa useimmin neljännelle sivulle ja vain harvoin kolmannelle sivulle, Millissä taas sekä kolmannelle että neljännelle sivulle. Kotitehtäväosiossa puuttuvan luvun tehtäviä oli Millissä kolme ja Tuhattaiturissa viisi kertaa. Ensimmäisellä sivulla tämä tehtävätyyppi oli puolet harvemmin kuin neljännellä sivulla kummassakin kirjassa. Tehtävätyyppi esiintyi tasaisemmin pitkin lukukautta Millissä kuin Tuhattaiturissa, mutta kummassakin kirjassa se painottui lukukauden jälkimmäiselle puoliskolle.

Hajotelmatehtävät sijoittuivat Tuhattaiturissa enimmäkseen kappaleen toiselle ja Millissä ensimmäiselle ja toiselle sivulle. Kolmannella sivulla tehtävätyyppi oli Tuhattaiturissa vain kerran ja Millissä kaksi kertaa. Kotitehtäväosiossa tätä tehtävätyyppiä oli Millissä useammin kuin Tuhattaiturissa. Tuhattaiturissa tehtävätyyppi esiintyi säännöllisemmin lukukauden mittaan kun taas Millissä sitä esiintyi harvemmin, mutta useampi tehtävä kerrallaan yhdessä kappaleessa.

Yhteen- ja vähennyslasku lukusuoralla -tyypin tehtäviä oli kummassakin kirjassa vain vähän. Millissä ne sijoittuivat pääasiassa kappaleen toiselle sivulle, Tuhattaiturissa kerran ensimmäiselle, kaksi kertaa toiselle ja kerran kolmannelle sivulle. Millissä tehtävätyyppi esiintyi 14 kappaleessa pitkin lukukautta, Tuhattaiturissa vain neljässä.

6.2 Tulosten tarkastelua

Kuten todettu, sekä Millissä että Tuhattaiturissa oli tutkituista tehtävätyypeistä eniten numeerisia yhteen- ja vähennyslaskuja. Algebrallisen ajattelun kehittymisen näkökulmasta tilanne ei ole yksiselitteinen. Toisaalta vahva matemaattisten perustoimintojen osaaminen vapauttaa ajattelua säännönmukaisuuksien ja yleistysten tekemiseen ja varhainen algebrallinen ajattelu lähtee liikkeelle juuri aritmetiikan yleistämisestä (Kieran, ym. 2016). Toisaalta kuitenkin hiljaisessa numeroilla laskemisessa algebrallinen ajattelu ei välttämättä kehity, sillä lapset kaipaavat rohkaisua matemaattisten ongelmien pohtimiseen (Blanton, ym. 2011, Carraher, ym. 2008). Pelkkä numeroilla laskeminen saattaa helposti näyttäytyä lapsille ikään kuin automatisoituna vastausautomaattina toimimisena. Erityisesti Tuhattaiturissa numeeriset yhteen- ja vähennyslaskut vakiintuivat säännölliseksi osaksi kappaleen tehtäviä melko varhaisessa vaiheessa ensimmäisen luokan syksyllä.

Seuraavaksi yleisin tehtävätyyppi kirjoissa oli kuvatuelliset yhteen- ja vähennyslaskut. Tämä tehtävätyyppi tarjoaa jo hiukan enemmän välineitä algebrallisen ajattelun tueksi. Varhainen algebrallinen ajattelu kehittyy taustatarinoiden eikä niinkään symbolisten numeroiden avulla (Carraher, ym. 2008). Jos vähennyslasku $5-2$ esitetään kuvien avulla, esimerkiksi että alunperin pihalla on viisi pupua ja seuraavassa kuvassa kaksi niistä loikkii pois ja tehtävien kuvitus noudattaa samaa logiikkaa jatkossakin, lapsella on jo parempi mahdollisuus ruveta tekemään yleistyksiä. Ensinnäkin vähennyslaskuun liittyy miinusmerkki (-), toisaalta alkuperäinen määrä pienenee pois lähtevien verran ja jäljelle jää alkuperäisen ja pois lähtevien lukumäärän ero. Varhaisen algebrallisen ajattelun kehittymisessä on tärkeää lähteä liikkeelle konkretiasta ja vasta pikkuhiljaa siirtyä numeeriseen esitystapaan (Mason, 2008).

Hajotelmatehtävien ydinajatus on tutkia tietyn luvun ominaisuuksia: minkälaisista yhdistelmistä esimerkiksi luku 6 muodostuu. Algebrallisen ajattelun kehittymisen näkökulmasta tällainen systemaattinen ja järjestelmällinen ominaisuuksien tutkiminen, lajittelu ja luokittelu on olennaista. Pienten lukujen hajotelmatehtävissä hyödynnetään lapsen luontaista taipumusta tutkia ja muodostaa säännönmukaisuuksia (Mason, 2008). Hajotelmatehtävät tarjoavat myös väylän syvemmälle algebralliselle ajattelulle kokonaisuuden ja osakokonaisuuden käsitteitä ja niiden yleistämistä varten. Luku 6 on kokonaisuus ja luvut 4 ja 2 ovat sen osia. Entä jos luokkahuoneen ihmiset ovatkin yksi kokonaisuus? Minkälaisiin osakokonaisuuksiin heidät voi jakaa? Yksi jako voisi olla esimerkiksi he, jotka söivät aamulla kaurapuuroa ja he, jotka eivät syöneet.

Puuttuvan luvun tehtävät ovat algebrallisen ajattelun kehittymisen kannalta kenties kaikkein mielenkiintoisimpia. Monipuoliset ongelmanratkaisu- ja päättelytehtävät ovat keskeisiä algebrallisen ajattelun kehittymiselle (Smith & Thompson, 2008, Blanton, ym. 2011). Puuttuvan luvun tehtävissä on mahdollisuus tutustua algebralle tyypilliseen symboliseen muuttujaan, mutta tämä edellyttää harkintaa tehtävän esittämisessä (Blanton, ym. 2011, Kieran, ym. 2016, Mason 2008). Pelkkä aukko tai tyhjä ruutu tai viiva puuttuvan luvun kohdalla ei välttämättä vielä ohjaa symbolisen muuttujan käyttöön ja kohti ongelmanratkaisun ajatusmalleja. Sen sijaan, jos tehtävässä esiintyy sekä numeroita, laskutoimitusmerkkejä että esimerkiksi kuvioita, aletaan jo lähestyä algebrallisia yhtälömuotoja. Toisaalta myös esimerkiksi pelkästään kuvina esitetty tehtävä ohjaa ajattelua määrittelemään muuttujat eri tavalla kuin vastaava numeerinen esitys ja tyhjä aukko. Kun tehtävässä näytetään, että lautasella oli alunperin neljä banaania ja nyt enää kaksi ja kysytään, kuinka monta on syöty, ollaan toisaalta lähempänä lapsen konkreettista ajatusmaailmaa ja toisaalta ohjataan lapsen ajattelua kohti algebrallisten ongelmien ratkaisutapaa (Smith & Thompson, 2006). Sama numeerisesti esitettynä $4 - _ = 2$ jää ehkä lapselle etäiseksi ja ratkaisu sen varaan,

muistaako lapsi, että mitä neljästä pitää vähentää, että jää kaksi. Kummassakin tutkitussa kirjassa oli kummallakin tavalla esitetyjä puuttuvan luvun tehtäviä.

6.3 Johtopäätökset ja jatkotutkimuskohteet

Algebrallisen ajattelun kehittyminen vaatii aikaa, tilaa ja mahdollisuuden kokeilla ja tutkia erilaisia ratkaisuja matemaattisiin ongelmiin puhuen, piirtäen tai muulla tavoin esittämällä (Blanton ym., 2011, Carraher, ym. 2008). Tähän samaan ohjaa myös Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Matematiikan ja ajattelun taitojen osalta POPS:issa (2014) painottuu käsitys luovasta ja tutkivasta, aktiivisesti toimivasta oppijasta.

Toisaalta tiedetään, että matematiikan opetus perustuu pitkälti oppikirjoihin ja oppilaiden suorittamiin tehtäviin eikä niinkään oppitunnilla tapahtuvaan matematiikkapuheeseen (Lepik, ym. 2015). Tutkittujen tehtävätyyppien valossa näyttää siltä, että myös algebrallisen ajattelun kehittyminen on pyritty ottamaan huomioon kummassakin oppikirjassa, mutta pääpaino on silti perinteisten, aritmeettisten laskutoimitusten harjoittelemisessa.

Millissä kuvatuellisia yhteen- ja vähennyslaskuja esiintyi kappaleen ensimmäisellä ja toisella sivulla yhteensä 37 kertaa, ja ne painottuivat kappaleen toiselle, opittua vahvistavien tehtävien sivulle. Tuhattaiturissa tätä tehtävätyyppiä esiintyi ensimmäisellä ja toisella sivulla yhteensä 20 kertaa, 11 tehtävää kappaleen ensimmäisellä ja 9 tehtävää toisella sivulla. Näin ollen käytännössä jokainen oppilas kohtaa oppitunnin aikana tämän tehtävätyypin.

Tuhattaiturissa hajotelmatehtäviä on yksi tai kaksi tehtävää kappaleessa hajanaistemmin kun taas Millissä tehtävätyyppi painottuu aina kappaleeseen, jossa uusi luku esitellään. Kummassakin kirjassa tämä tehtävätyyppi esiintyy usein perustehtävien aukeamalla, kappaleen ensimmäisellä ja toisella sivulla.

Puuttuva luku yhteen- ja vähennyslaskuissa -tyypin tehtävät sijoituivat ensimmäiselle ja toiselle sivulle lähinnä niiden kappaleiden yhteydessä, jossa puuttuvan luvun käsittely oli pääosassa. Muissa kappaleissa ne painottuivat Tuhattaiturissa neljälle, eli kappaleen viimeiselle soveltavalle sivulle (14 kertaa) ja olivat usein kuvassa 5 olevan tehtävän kaltaisia. Millissä tehtävien esitystapa vaihteli enemmän ja ne olivat monipuolisempia. Tehtävätyyppi esiintyi 15 kertaa kolmannella ja 19 kertaa neljännellä sivulla. Algebrallisen ajattelun kehittymisen näkökulmasta ehkä merkittävimmät ja toisaalta myös POPS:n (2014) oppijäkäsityksen mukaiset, ajattelua haastavat tehtävät sijoituivat siis kummassakin oppikirjassa käytännössä soveltavien tehtävien osuuteen. Käytännön kokemus kuitenkin osoittaa, että vain pieni osa oppilaista ehtii ollenkaan tehdä näitä tehtäviä oppitunnin aikana.

Jatkotutkimuskohteita voisivatkin olla matematiikan opetuksen käytänteet: kuinka opettajat pystyisivät lisäämään algebralliseen ajatteluun ohjaavaa matematiikkapuhetta oppitunneille niin, että se on mielekästä hyvin heterogeenisissä opetusryhmissä? Toinen tutkimuksen kohde voisi olla, kuinka oppilaita voidaan ohjata entistä tehokkaammin algebrallisen ajattelun suuntaan myös itsenäisillä tehtävillä, jotka olisivat koko ryhmän saavutettavissa.

Lähteet

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B. & Zbiek, R.M. 2011. Developing Essential Understanding of Algebraic Thinking for Teaching Mathematics in Grades 3-5. Virginia: National Council of teachers of Mathematics

Carraher, D., Schliemann, A. & Schwartz, J. 2008. Early algebra is not the same as algebra early. Teoksessa J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (toim.) Algebra in the Early Grades. New York: Routledge, 235-272.

Heikkilä T. 2014. Tilastollinen tutkimus. Helsinki: Edita.

Forsback, M., Kalliola, A., Tikkanen, A. & Wanes, M-L. 2014. Tuhattaituri 1a. Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Otava.

Häkkinen, K., Kaleva, T., Similä, M. & Sohlman, L. 2018. Helsinki: Sanoma Pro Oy.

Joutsenlahti, J. & Vainionpää, J. 2007. Minkälaiseen matemaattiseen osaamiseen peruskoulussa käytetty oppimateriaali ohjaa? Teoksessa K. Merenluoto, A. Virta & P. Carpelan (toim.) Opettajankoulutuksen muuttuvat rakenteet: Ainedidaktinen symposium 9.2.2007. Turku: Turun opettajankoulutuslaitos, 184-191.

Kaput, J. 2008. What is Algebra? What is algebraic reasoning? Teoksessa J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (toim.) Algebra in the Early Grades. New York: Routledge, 5-17.

Kieran, C., Pang, J., Schiffer, D. & Ng, S. F. 2016. Early Algebra. Saatavilla [www-muodossa](#)

<https://library.oapen.org/bitstream/handle/20.500.12657/27822/1002183.pdf?sequence=1> luettu 16.11.2022

Lepik, M., Grevholm, B., & Viholainen, A. 2015. Using textbooks in the mathematics classroom—the teachers' view. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 20 (3-4), 129-156.

Mason, J. 2008. Making use of children's powers. Teoksessa J. Kaput, D. Carragher, D. & M. Blanton (toim.) *Algebra in the Early Grades*. New York: Routledge, 57-94.

Opetushallitus 2014. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014. Helsinki: Opetushallitus. Saatavilla [www-muodossa](http://www.muodossa)
https://www.oph.fi/sites/default/files/documents/perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf luettu 18.11.2022

Perkkilä, P. 2002. Opettajien matematiikkauskomukset ja matematiikan oppikirjan merkitys alkuopetuksessa. Saatavilla [www-muodossa](http://www.muodossa)
https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/42025/1/978-951-39-5338-6_2002.pdf luettu 18.11.2022

Perusopetuslaki 1998/628. Saatavilla [www-muodossa](http://www.muodossa)
<https://www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/1998/19980628#L2P6> luettu 21.11.2022

Rezat, S., Strässer, R. 2012. From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM Mathematics Education* 44, 641–651.

Rezat, S. & Strässer, R. 2015. Methodological issues and challenges in research on mathematics textbooks. *Nordic Studies on Mathematics Education*, 20 (3-4), 147-266.

Seeley, C. 2004. NCTM News Bulletin (September 2004) luettavissa [www-muodossa](http://www.nctm.org)

https://www.nctm.org/uploadedFiles/News_and_Calendar/Messages_from_the_President/Archive/Cathy_Seeley/2004_09_journey.pdf luettu 21.11.2022

Smith, J. & Thompson, P. 2008. Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. Teoksessa J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (toim.) *Algebra in the Early Grades*. New York: Routledge, 95-132.

Tossavainen, T. 2019. Poimintoja matematiikan oppimateriaalien tutkimuksesta. Teoksessa H. Ruuska & M. Löytönen (toim.): *Tutkimuskohteena tietokirja. Pirjo Hiidenmaan juhlakirja*. Helsinki: Unigrafia, 157-167. Helsinki: Unigrafia

Tuomi J. & Sarajärvi, A. 2018. *Laadullinen tutkimus ja sisällönanalyysi*. Helsinki: Tammi